विषय-सूची

Vol. 45 April 2002 No.2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 2, April 2002.

बहुचरीय बेसल बहुपद

एच. एस. पी. श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान स्नातकोत्तर महाविद्यालय, रतलाम (म. प्र.)

[प्राप्त – नवम्बर 17, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखक द्वारा बहुचरीय बेसल बहुपद के अनेक समाकल निरूपण ज्ञात किये गये हैं जिसमें कन्टूर समाकल भी है और इन समाकल निरूपण में त्रिकोणमितीय फलन एवं कम्पे-द-फेरी फलन अन्तर्विष्ट है। बहुचरीय बेसल बहुपद के अनेक एक एवं बहुचरीय बेसल बहुपद के अनेक एक एवं बहु जनक-फलन को भी ज्ञात किया गया है, जो कई पहुपदों को अन्तर्विष्ट करता है जैसे लेजेन्ड्रे, लॉगुरे, हरमाइट, गेगनबर और बेसल फलन। इन सूत्रों का प्रयोग बहुपद-सिद्धांत में बहुत उपयोगी हो सकता है।

Abstract

Multivariable Bessel polynomials. *By* H. S. P. Shrivastava, Mathematics Department, Government Arts and Science PG College, Ratlam (M.P.).

In the present paper we derive many intergral representations of multivariable Bessel polynomials defined by author involving trigonometric functions and generalized Kampe-de-Feriet function and its contour integrals are also derived. We also established many single and multiple generating function relations of multivariable Bessel polynomials such as Legendre, Laguerre, Hermite, Gegenbauer and Bessel function. Application of these formulas may provide potentially useful generalizations of known results in the theory of polynomials.

1. प्रस्तावना

क्राल एवं फ्रिंक [12 ; देखें 10, 11 भी] ने बेसल बहुपद को सर्वप्रथम प्रचारित एवं अध्ययन किया और इसका नाम सरल बेसल बहुपद (Simple Bessel polynomials) दिया एवं निम्न प्रकार

से परिभाषित किया—

$$Y_n(x) = {}_2F_0\left(-n, n+1; -; -\frac{x}{2}\right) \tag{1.1}$$

व्यापकीकृत बेसल बहुपद निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया :

$$Y_n(a, b, x) = {}_2F_0\left(-n, a-1+n; -; -\frac{x}{b}\right) \tag{1.2}$$

उन्होंने इन बहुपदों को गोलीय निर्देशांक में तरंग समीकरण (Wave equation in Sphe rical Coordinate) के हल के संबंध में परिभाषित किया। ये बहुपद निम्न अवकलन समीकरण के बहुपद हल हैं :

$$x^2 y'' + (ax + b)y' - n(n + a - 1)y = 0 \tag{1.3}$$

जहाँ पर a, b स्वेच्छ प्राचल (arbitrary parameters) एवं n एक धनात्मक पूर्णांक है।

सरल बेसल बहुपद $Y_n(x)$ और बेसल फलन $J_n(x)$ के बीच संबंध निम्न प्रकार का होता है :

$$Y_n\left(\frac{1}{ir}\right) = \left(\frac{\pi r}{2}\right)^{1/2} e^{ir}\left[i^{-n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(r) + i^n J_{-n-\frac{1}{2}}(r)\right] \tag{1.4}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(r) = (2\pi r)^{-1/2}\left[i^{-n-1} e^{ir} Y_n\left(-\frac{1}{ir}\right) + i^{n+1} e^{-ir} Y_n\left(-\frac{1}{ir}\right)\right] \tag{1.5}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(r) = (2\pi r)^{-1/2}\left[i^n e^{ir} Y_n\left(-\frac{1}{ir}\right) + i^{-n} e^{-ir} Y_n\left(-\frac{1}{ir}\right)\right] \tag{1.6}$$

बेसल बहुपद इकाई वृत्त पर निम्न घनत्व या गरिमा फलन (density or weight function) के सापेक्ष में लांबिक (orthogonal) होते हैं।

$$\omega(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\left(-\frac{2}{x}\right)^n}{\Gamma(a+n-1)} \tag{1.7}$$

बेसल फलन का अनेक शोधकर्ताओं ने अध्ययन किया उसमें मुख्य हैं — अग्रवाल[1], अल-सलाम[2], ब्राफमैन[3], बर्चनाल[4], कॉर्लिट्ज[5], चटर्जी[6], डिकिन्सन[7], एर्डेल्यी[8], इवेडा[9], ग्रासवाल्ड[10, 11], रेनविले[13, 14] और टॉसकानो[23]।

लेखक[22] ने द्विचरीय, तीन चरीय एवं बहुचरीय बेसल बहुपद को पारिभाषित किया एवं इनके गुणधर्म का अध्ययन किया। इसके अनेकों समाकल (कन्टूर समाकल भी), एक एवं द्वि जनक-फलन, प्रसार, पुनरावृत्ति संबंधों (recurrence relations)को निकाल कर सिद्ध किया।

द्वि चरीय, तीन चरीय एवं बहु चरीय बेसल बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

$$Y_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}(1+\alpha+n)_s(1+\beta+m)_r\left(-\frac{x}{2}\right)^s\left(-\frac{y}{2}\right)^r}{r!\,x!} \tag{1.8}$$

$$= F_2\left(-n;\ 1+\beta+m,\ 1+\alpha+n;\ -;\ -;\ -\frac{x}{2},\ -\frac{y}{2}\right) \tag{1.9}$$

$$Y_{n,m,p}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x, y, z) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{u=0}^{n-r-s} \frac{(-n)_{r+s+u}(1+\alpha+n)_u(1+\beta+m)_s(1+r+p)}{r!\,s!\,u!}$$

$$\times \left(-\frac{x}{2}\right)^u \left(-\frac{y}{2}\right)^s \left(-\frac{z}{2}\right)^r \tag{1.10}$$

$$F_{0:0:0:0}^{1:1:1:1}\left(\begin{matrix}-n : 1+\gamma+p;\ 1+\beta+m;\ 1+\alpha+n; \\ - :\quad -;\quad -;\quad -;\end{matrix}\ \left(-\frac{x}{2}\right), \left(-\frac{y}{2}\right), \left(-\frac{z}{2}\right)\right) \tag{1.11}$$

$$Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right) = \sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{r_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}} \left(-n_1\right)_{r_1+\ldots+r_p} \prod_{j=1}^{p}$$

$$\times \left[\left(r_j!\right)^{-1}\left(1+\alpha_j+n_j\right)_{r_{p+1-j}}\left(-\frac{x_j}{2}\right)^{r_{p+1-j}}\right] \tag{1.12}$$

$$= F_{0;0;\ldots;0}^{1;1;\ldots;1}$$

$$\times \left(\begin{matrix}-n_1 : 1,\ldots 1) : (1+\alpha_p+n_p : 1);\ldots;(1+\alpha_1+n_1 : 1); \\ - :\quad -;\ldots;\quad -;\end{matrix}\ \left(-\frac{x_1}{2}\right),\ldots,\left(-\frac{x_p}{2}\right)\right) \tag{1.13}$$

जहाँ पर सूत्र (1.9), (1.11), (1.13) के दाँये पक्ष में F-फलन क्रमशः एपेल फलन, कम्पे-द-फेरी फलन तीन चरों का, श्रीवास्तव [15, See देखें 16-18 भी] का बहुचरीय व्यापकीकृत लॉरीसेला फलन है।

2. समाकल निरूपण

इस अनुभाग में हम बहुचरीय बेसल के अनेक समाकल निरूपणों को सिद्ध करेंगे। इसमें बहुचरीय बेसल बहुपद के कन्टूर समाकल भी सम्मिलित हैं :

$$\int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_1^{\alpha_1 + n_1} \ldots u_p^{\alpha_p + n_p} \right) \times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right) du_1 \ldots du_p$$

$$= \left[\Gamma\left(1 + \alpha_1 + n_1 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_p + n_p \right) \right] . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right) \tag{2.1}$$

$$\int_0^{t_1} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{t_p} \left[x_1^{\alpha_1} \left(t_1 - x_p \right)^{n_1 - 1} \ldots x_p^{\alpha_p} \left(t_p - x_p \right)^{n_p - 1} \right] \times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right) dx_1 \ldots dx_p$$

$$= \frac{\left(\Gamma\left(n_1 \right) \ldots \Gamma\left(n_p \right) \right) \left(t_1^{\alpha_1 + n_1} \ldots t_p^{\alpha_p + n_p} \right)}{\left(1 + \alpha_1 \right)_{n_1} \ldots \left(1 + n_p \right)_{n_p}} . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1 - n_1, \ldots, \alpha_p - n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right) \tag{2.2}$$

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1 - 1} \left(1 - u_1 \right)^{b_1 - 1} \ldots u_p^{\alpha_p - 1} \left(1 - u_p \right)^{b_p - 1} \right] \times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(u_1 x_1, \ldots, u_p x_p \right) du_1 \ldots du_p$$

$$= B\left(a_1, b_1\right) \ldots B\left(a_p, b_p\right) F^{1;2;\ldots;2}_{0;1;\ldots;1}$$

$$\times \left(\begin{matrix} -n_1 : 1+\alpha_p+n_p, a_p ; \ldots ; 1+\alpha_1+n_1\, a_1 ; \\ - : \quad a_p+b_p \quad ; \ldots ; \quad a_1+b_1 ; \end{matrix} -\frac{x_p}{2}, \ldots, -\frac{x_1}{2}\right) \quad (2.3)$$

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1-1}\left(1-u_1\right)^{b_1-1} \ldots u_p^{\alpha_p-1}\left(1-u_p\right)^{b_p-1} \right]$$

$$\times Y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)}_{n_1, \ldots, n_p} \left(x_1\left(1-u_1\right), x_2 u_2 \ldots, u_p x_p\right) du_1 \ldots du_p$$

$$= B\left(a_1, b_1\right) \ldots B\left(a_p, b_p\right) F^{1;2;\ldots;2}_{0;1;\ldots;1}$$

$$\times \left(\begin{matrix} -n_1 : 1+\alpha_p+n_p, a_p ; \ldots ; 1+\alpha_1+n_2, a_2 ; 1+\alpha_1+n_1, b_1 ; \\ - : \quad a_p+b_p \quad ; \ldots ; \quad a_2+b_2 ; \quad a_1+b_1 ; \end{matrix} -\frac{x_p}{2}, \ldots, -\frac{x_1}{2}\right)$$

(2.4)

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1-1}\left(1-u_1\right)^{b_1-1} \ldots u_p^{\alpha_p-1}\left(1-u_p\right)^{b_p-1} \right]$$

$$\times Y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)}_{n_1, \ldots, n_p} \left(x_1 u_1, \ldots, x_{p-1}, u_{p-1}, x_p \left(1-u_p\right)\right) du_1 \ldots du_p$$

$$= B\left(a_1, b_1\right) \ldots B\left(a_p, b_p\right) F^{1;2;\ldots;2}_{0;1;\ldots;1}$$

$$\times \left(\begin{matrix} -n_1 : 1+\alpha_p+n_p, b_p ; 1+\alpha_{p-1}+n_{p-1}, a_{p\,1} ; \ldots ; 1+\alpha_1+n_1, a_1 ; \\ - : \quad a_p+b_p \quad ; \ldots ; \quad a_{p-1}+b_{p-1} ; \ldots ; \quad a_1+b_1 ; \end{matrix} -\frac{x_p}{2}, \ldots, -\frac{x_1}{2}\right)$$

(2.5)

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1 - 1} \left(1 - u_1\right)^{b_1 - 1} \ldots u_p^{\alpha_p - 1} \left(1 - u_p\right)^{b_p - 1} \right]$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1 \left(1 - u_1\right), \ldots, x_p \left(1 - u_p\right) \right) du_1 \ldots du_p$$

$$= B\left(a_1, b_1\right) \ldots B\left(a_p, b_p\right) F_{0;1;\ldots;1}^{1;2;\ldots;2}$$

$$\times \begin{pmatrix} -n_1 : 1 + \alpha_p + n_p, b_p ; \ldots ; 1 + \alpha_1 + n_1, b_1 ; & -\frac{x_p}{2}, \ldots, -\frac{x_1}{2} \\ - : \quad a_p + b_p \quad ; \ldots ; \quad a_1 + b_1 ; & \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1} \left(1 - u_1\right)^{n_1 - 1} \ldots u_p^{\alpha_p} \left(1 - u_p\right)^{b_p - 1} \right]$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(u_1 x_1, \ldots, u_p x_p \right) du_1 \ldots du_p$$

$$= \left(\Gamma\left(n_1\right) \ldots \Gamma\left(n_p\right) \right) \left(\left(1 + \alpha_1\right)_{n_1} \ldots \left(1 + \alpha_p\right)_{n_p} \right)^{-1}$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1 - n_1, \ldots, \alpha_p - n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right) \tag{2.7}$$

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{n_1} \left(1 - u_1\right)^{\alpha_1 - 1} \ldots u_p^{n_p} \left(1 - u_p\right)^{\alpha_p - 1} \right]$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} \left(u_1 x_1, \ldots, u_p x_p \right) du_1 \ldots du_p$$

$$= \left(n_1 ! \ldots, n_p !\right)\left(\left(\alpha_1\right)_{1+n_1} \cdots \left(\alpha_p\right)_{1+n_p}\right)^{-1} Y^{(0, \ldots, 0)}_{n_1, \ldots, n_p}\left(x_1, \ldots, x_p\right) \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^1 \left[u_1^{\alpha_1+n_1-a_1}\left(1-u_1\right)^{a_1} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p-a_p}\left(1-u_p\right)^{a_p}\right]$$

$$\times Y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)}_{n_1, \ldots, n_p}\left(x_1 u_1, \ldots, x_p u_p\right) du_1 \ldots du_p$$

$$= B\left(1+\alpha_1+b_1-a_1, a_1\right) \ldots B\left(1+\alpha_p+n_p-a_p, a_p\right)$$

$$\times Y^{(\alpha_1-a_1, \ldots, \alpha_p-a_p)}_{n_1, \ldots, n_p}\left(x_1, \ldots, x_p\right) \tag{2.9}$$

$$\int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_1^{-\alpha_1-n_1-1} \ldots u_p^{\alpha_p-n_p-1}\right)$$

$$\times \exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right) Y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)}_{n_1, \ldots, n_p}\left(\frac{2x_1}{u_1}, \ldots, \frac{2x_p}{u_p}\right) du_1 \ldots du_p$$

$$= \pi(-1)^{p+n_1+\ldots+n_p}\left[\left(\sin\alpha_1\pi \ldots \sin\alpha_p\pi\right)\left(\Gamma\left(1+\alpha_1+n_1\right) \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \Gamma\left(1+\alpha_p+n_p\right)\right)\right]^{-1}\left(1-x_1-\ldots-x_p\right)^{n_1} \tag{2.10}$$

$$\int_\infty^{(0+)} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_\infty^{(0+)} \left[\left(-u_1\right)^{\alpha_1+n_1} \ldots \left(-u_p\right)^{\alpha_p+n_p}\right]$$

$$\times \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\ldots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} \exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right) du_1 \ldots du_p$$

$$= (2\,i)^{p}(-1)^{n_1+\ldots+n_p}\Big(\sin\alpha_1\pi\ \ldots\ \sin\alpha_p\pi\Big)\Big(\Gamma\Big(1+\alpha_1+n_1\Big)\ldots$$

$$\times\,\Gamma\Big(1+\alpha_p+n_p\Big)\Big)\,Y^{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_p)}_{n_1,\,\ldots,\,n_p}\Big(x_1,\,\ldots,\,x_p\Big) \tag{2.11}$$

$$\int_{-\infty}^{(0+)}\ldots\ (p-\text{समाकल})\ \ldots\int_{-\infty}^{(0+)}\Big[\Big(u_1\Big)^{\alpha_1+n_1}\ldots\Big(u_p\Big)^{\alpha_p+n_p}\Big]$$

$$\times\Big(1-\frac{x_1u_1}{2}-\ldots-\frac{x_pu_p}{2}\Big)^{n_1}\exp\Big(u_1+\ldots+u_p\Big)\,du_1\ \ldots\ du_p$$

$$= (2\,i)^{p}(-1)^{p+n_1+\ldots+n_p}\Big(\sin\alpha_1\pi\ \ldots\ \sin\alpha_p\pi\Big)\Big(\Gamma\Big(1+\alpha_1+n_1\Big)\ldots$$

$$\times\,\Gamma\Big(1+\alpha_p+n_p\Big)\Big)\,Y^{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_p)}_{n_1,\,\ldots,\,n_p}\Big(x_1,\,\ldots,\,x_p\Big) \tag{2.12}$$

जहाँ पर,

(i) संबंध (2.3) से (2.6) के दाहिनी ओर आये F-फलन एक बहुचरीय कम्पे-द-फेरी फलन है [18, eq (24), p.38]।

(ii) सूत्र (2.3) में क्रमशः $a_i = \alpha_i + 1,\ b_i = n_i;\ a_i = n_i + 1,\ b_i = \alpha_i;$

$$a_i \to \alpha_i - a_i + n_i + 1,\ b_i = a_i\,(i = 1,\,2,\,\ldots\,p)$$

प्रतिस्थापित करने पर हमें सूत्र (2.7), (2.8), (2.9) की प्राप्ति होती है।

(iii) सूत्र (2.11) एवं (2.12) बहुचरीय बेसल बहुपद के कन्टूर समाकल हैं।

सूत्र (2.1) की उपपत्ति : वाम पक्ष में बहुपदी प्रमेय (multinomial theorem)

$$\Big(1+x_1+\ldots+x_p\Big)^{n}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{n} \sum_{r_2=0}^{n-r_1} \sum_{r_p=0}^{n-r_1 \ldots -r_p-1} \frac{(-1)^{r_1+\ldots+r_p}(-n)_{r_1+\ldots+r_p}(x_p)^{r_1} \ldots (x_1)^{r_p}}{r_1! \ldots r_p!} \tag{2.13}$$

का प्रयोग कर, श्रेणी एवं समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{r_1=0}^{n} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}} \frac{(-n_1)_{r_1+\ldots+r_p}\left(\frac{-x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{-x_1}{2}\right)^{r_p}}{r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \int_0^\infty u_1^{\alpha_1+n_1+r_p} e^{-u_1} du_1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty u_p^{\alpha_p+n_p+r_1} e^{-u_p} du_p \tag{2.14}$$

आन्तरिक समाकलों का मान गामा फलन के समाकल [14, p.9] से ज्ञात कर रखने पर और अन्त में बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (2.1) प्राप्त होता है।

सूत्र (2.2) की उपपत्ति : वाम पक्ष में बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग कर, श्रेणी एवं समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_p-1}$$

$$\times \frac{(-n_1)_{r_1+\ldots+r_p}(1+\alpha_p+n_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_1+n_1)_{r_p}\left(-\frac{1}{2}\right)^{r_1+\ldots+r_p}}{r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \int_0^{t_1} x_1^{\alpha_1+r_p}\left(t_1-x_1\right)^{n_1-1} dx_1 \ldots (p-\text{समाकल}) \int_0^{t_p} x_p^{\alpha_p+r_1}\left(t_p-x_p\right)^{n_p-1} dx_p \tag{2.15}$$

$x_i = t_i\theta_i$ $dx_i = t_i d\theta_i$ सीमा $\theta_i : 0 \to 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ प्रतिस्थापित करने पर एवं आन्तरिक समाकलों को बीटा फलन के समाकल [2, eq (1), p.18] से ज्ञात कर और अन्त में फिर से बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग करने पर वांछित सूत्र (2.2) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार सूत्र (2.3) से (2.10) को सहजता से प्राप्त किया जा सकता है।

सूत्र (2.11) की उपपत्ति : वाम पक्ष में बहुपदी प्रमेय (2.13) का प्रयोग कर, श्रेणी एवं समाकल

का क्रम परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{r_p=0}^{n_1-r_1-\cdots-r_p-1} \frac{(-n_1)_{r+\ldots+r_{p1}} \left(\frac{x_1}{2}\right)^{x_p} \cdots \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1}}{r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \int_0^{(0+)} (-u_1)^{\alpha_1+n_1+r_p} e^{-u_1} du_1 \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{(0+)} (-u_p)^{\alpha_p+n_p+r_1} e^{-u_p} du_p \tag{2.16}$$

आन्तरिक समाकलों का मान ज्ञात समाकल [8, eq (4), p.14] अर्थात्

$$\int_{\infty}^{(0+)} (-u_1)^{z-1} e^{-u} du = -2i\,\Gamma(z) \sin(\pi z), \ |\arg(-t)| \le \pi \tag{2.17}$$

से ज्ञात कर और अन्त में बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का अनुप्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र प्राप्त होता है।

इसी प्रकार सूत्र (2.12) को भी सिद्ध किया जा सकता है। केवल (2.11) में आन्तरिक समाकलों का मान ज्ञात समाकल (2.17) के स्थान पर ज्ञात समाकल [8, eq (2), p. 13], अर्थात्

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2ni} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt, \ |\arg(t)| \le \pi \tag{2.18}$$

एवं संबंध [2, p.21] अर्थात्

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z \tag{2.19}$$

का प्रयोग किया जावेगा।

3. जनक फलन :

बहुचरीय बेसल बहुपद के अनेक एकीय एवं बहु जिसमें विभिन्न बहुपद जैसे बेसल फलन; लेजेन्ड्रे, लॉगरे, गेगनबर बहुपद एक चरीय एवं बहुचरी निहित है, का प्रतिपादन इस अनुभाग में किया जायेगा जो निम्न प्रकार है :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{t^{n_1}}{n_1!} Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1-n_1,\ldots,\alpha_p-n_p)} \left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \exp(t)\left(1-\frac{x_1 t}{2}\right)^{-1-\alpha_1}\cdots\left(1-\frac{x_p t}{2}\right)^{-1-\alpha_p} \tag{3.1}$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{t^{n_1}}{n_1!}\cdot Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1,\alpha_2-n_2,\ldots,\alpha_p-n_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2t}{1+\sqrt{1-2x_1 t}}\right)\left(1-2x_1 t\right)^{-1/2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2x_1 t}}\right)^{\alpha_1}$$

$$\times\left(1-\frac{x_2 t}{1+\sqrt{1-2x_1 t}}\right)^{-1-\alpha_2}\cdots\left(1-\frac{x_p t}{1+\sqrt{1-2x_1 t}}\right)^{-1-\alpha_p} \tag{3.2}$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{t^{n_1}}{n_1!}\cdot Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1-n_1,\ldots,\alpha_{p-1}-n_{p-1},\alpha_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2t}{1+\sqrt{1-2x_p t}}\right)\left(1-2x_p t\right)^{-1/2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2x_p t}}\right)^{\alpha_p}$$

$$\times\left(1-\frac{x_1 t}{1+\sqrt{1-2x_p t}}\right)^{-1-\alpha_1}\cdots\left(1-\frac{x_{p-1} t}{1+\sqrt{1-2x_p t}}\right)^{-1-\alpha_{p-1}} \tag{3.3}$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{t^{n_1}}{n_1!}\cdot Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1-2n_1,\alpha_2-n_2,\ldots,\alpha_p-n_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2t}{2+x_1 t}\right)\left(1+\frac{x_1 t}{2}\right)^{\alpha_1}\left(1-\frac{x_2 t}{2+x_1 t}\right)^{-1-\alpha_2}\cdots$$

$$\times\left(1-\frac{x_p t}{2+x_1 t}\right)^{-1-\alpha_p} \tag{3.4}$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{t^{n_1}}{n_1!} . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1 - n_1, \ldots, \alpha_{p-1} - n_{p-1}, \alpha_p - 2n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \exp\left(\frac{2t}{2 + x_p t} \right) \left(1 + \frac{x_p t}{2} \right)^{\alpha_p} \left(1 - \frac{x_1 t}{2 + x_p t} \right)^{-1-\alpha_1} \ldots$$

$$\times \left(1 - \frac{x_{p-1} t}{2 + x_p t} \right)^{-1-\alpha_{p-1}} \qquad (3.5)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta)^k . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, k - n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= (1 + \beta)^{-1} . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, -n_p)} \left(x_1, \ldots, x_{p-1}, \frac{x_p}{1 + \beta} \right) \qquad (3.6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta)^k . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(k - n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= (1 + \beta)^{-1} . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(k - n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(\frac{x_1}{1 + \beta}, x_2, \ldots, x_p \right) \qquad (3.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} . Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, k - n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_1 + n_1 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_{p-1} + n_{p-1} \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_1^{\alpha_1 + n_1} \ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1} + n_{p-1}} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times J_0\left(2\sqrt{\beta u_p} \right) du_1 \ldots du_p \qquad (3.8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \cdot Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(k-n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_2 + n_2 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_p + n_p \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p - \text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_2^{\alpha_2 + n_2} \ldots u_p^{\alpha_p + n_p} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} J_0\left(2 \sqrt{\beta u_1} \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta^2) \; Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 2k-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_1 + n_1 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_{p-1} + n_{p-1} \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p - \text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_1^{\alpha_1 + n_1} \ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1} + n_{p-1}} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times \cos\left(\beta \, u_p \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta^2) \; Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(2k-n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_2 + n_2 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_p + n_p \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_2^{\alpha_2+n_2} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times \cos\left(\beta u_1 \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^{2k+1} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 2k-n_p+1)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_1 + n_1 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_{p-1} + n_{p-1} \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_1^{\alpha_1+n_1} \ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1}+n_{p-1}} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times \sin\left(\beta u_p \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^{2k+1} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(2k-n_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p,)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_2 + n_2 \right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_p + n_p \right) \right)^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_2^{\alpha_2+n_2} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times \sin\left(\beta u_1\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_p)_k \, (n_p + 1)_k}{k!} \, Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, k-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_1 + n_1\right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_{p-1} + n_{p-1}\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_1^{\alpha_1 + n_1} \ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1} + n_{p-1}}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p\right)$$

$$\times P_{n_p}\left(1 - 2 u_p\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_1)_k \, (n_1 + 1)_k}{k!} \, Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(k-n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1 + \alpha_2 + n_2\right) \ldots \Gamma\left(1 + \alpha_p + n_p\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_2^{\alpha_2 + n_2} \ldots u_{p-1}^{\alpha_p + n_p}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p\right)$$

$$\times P_{n_p}\left(1 - 2 u_1\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_1)_k}{k! \; n_1!} \, Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1 + k - n_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1+\alpha_1+n_1\right)\ldots\Gamma\left(1+\alpha_p+n_p\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2+n_2} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p}\right)$$

$$\times \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\ldots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right)$$

$$\times L_{n_1}^{(\alpha_1)}\left(u_1\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_1)_k}{k!\, n_1!} Y_{n_1,\ldots,n_p}^{\left(-\frac{1}{2}-n_1+k,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\right)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= (-1)^{n_1}\left[\sqrt{\pi}\left(2n_1!\right)\Gamma\left(1+\alpha_2+n_2\right)\ldots\Gamma\left(1+\alpha_p+n_p\right)\right]^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(\left(u_1\right)^{-\frac{1}{2}} u_2^{\alpha_2+n_2} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p}\right)$$

$$\times \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\ldots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right)$$

$$\times H_{2n_1}\left(\sqrt{u_1}\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.17}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_1)_k}{k!\, n_1!} Y_{n_1,\ldots,n_p}^{\left(\frac{1}{2}+k-n_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\right)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= (-1)^{n_1}\left[\sqrt{\pi}\left(2n+1\right)\Gamma\left(1+\alpha_2+n_2\right)\ldots\Gamma\left(1+\alpha_p+n_p\right)\right]$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_2^{\alpha_2+n_2} \ldots u_p^{\alpha_p+n_p} \right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1} . \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right)$$

$$\times H_{2n_1+1}\left(\sqrt{u_1} \right) du_1 \ldots du_p \qquad \textbf{(3.18)}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_p=0}^{\infty} \left(-\lambda_1 \right)^{m_1} \ldots \left(-\lambda_p \right)^{m_p} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(m_1-n_1, \ldots, m_p-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left(\left(1 + \lambda_1 \right) \ldots \left(1 + \lambda_p \right) \right)^{-1} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(-n_1, \ldots, -n_p)}$$

$$\times \left(\frac{x_1}{1 + \lambda_1}, \ldots, \frac{x_p}{1 + \lambda_p} \right) \qquad (3.19)$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda_1 \right)^{m_1} \ldots \left(-\lambda_p \right)^{m_p}}{m_1! \ldots m_p!} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(m_1-n_1, \ldots, m_p-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(- u_1 - \ldots - u_p \right) J_0\left(2\sqrt{\lambda_1 u_1} \right) \ldots J_0\left(2\sqrt{\lambda_p u_p} \right) du_1 \ldots du_p$$

$$(3.20)$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_p=0}^{\infty} \left(-\lambda_1^2 \right)^{m_1} \ldots \left(-\lambda_p^2 \right)^{m_p} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(2m_1-n_1, \ldots, 2m_p-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p\right) \cos\left(\lambda_1 u_1\right) \ldots \cos\left(\lambda_p u_p\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.21}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_p=0}^{\infty} (-1)^{m_1+\ldots+m_p} \ldots \left(\lambda_1^{2m_1+1} \lambda_2^{2m_2} \ldots \lambda_p^{2m_p}\right)$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(2m_1-n_1+1, 2m_2-n_2, \ldots, 2m_p-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p\right) \sin\left(\lambda_1 u_1\right) \cos\left(\lambda_2 u_2\right) \ldots \cos\left(\lambda_p u_p\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.22}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_p=0}^{\infty} (-1)^{m_1+\ldots+m_p} \ldots \left(\lambda_1^{2m_1} \ldots \lambda_{p-1}^{2m_p-1} \lambda_p^{2m_p+1}\right)$$

$$\times Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(2m_1-n_1, \ldots, 2m_{p-1}-n_{p-1}, 2m_p-n_p+1)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p\right) \cos\left(\lambda_1 u_1\right) \ldots$$

$$\times \cos\left(\lambda_{p-1} u_{p-1}\right) \sin\left(\lambda_p u_p\right) du_1 \ldots du_p \tag{3.23}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} (-1)^{m_1+\cdots+m_p} \cdots \left(\lambda_1^{2m_1+1} \cdots \lambda_{p-1}^{2m_p+1}\right)$$

$$\times Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(2m_1-n_1+1,\ \ldots,\ 2m_p-n_p+1)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \cdots (p-\text{समाकल}) \cdots \int_0^{\infty} \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\cdots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1-\cdots-u_p\right) \sin\left(\lambda_1 u_1\right) \cdots \sin\left(\lambda_p u_p\right) du_1 \cdots du_p \tag{3.24}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{\left[\left(-n_1\right)_{k_1}\left(n_1+1\right)_{k_1}\right] \cdots \left[\left(-n_{p-1}\right)_{k_{p-1}}\left(n_{p-1}+1\right)_{k_{p-1}}\right]}{k_1! \cdots k_p!}$$

$$\times Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(k_1-n_1,\ \ldots,\ k_{p-1}-n_{p-1},\ \alpha_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \left(\Gamma\left(1+\alpha_p+n_p\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \cdots (p-\text{समाकल}) \cdots \int_0^{\infty} u_p^{\alpha_p+n_p} \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\cdots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1-\cdots-u_p\right) P_{n_1}\left(1-2u_1\right) \cdots P_{n_{p-1}}\left(1-2u_{p-1}\right)$$

$$\times du_1 \cdots du_p \tag{3.25}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{\left(-\beta_1\right)^{k_1} \cdots \left(-\beta_p\right)^{k_p}}{k_1! \cdots k_p!} \ Y_n^{(k_1,\ \ldots,\ k_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(u_1 \ldots u_p \right)^n \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p \right) J_n\left(2\sqrt{\beta_1 u_1}, \ldots, 2\sqrt{\beta_p u_p} \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.26}$$

$$\sum_{k_1=0}^\infty \ldots \sum_{k_p=0}^\infty \frac{\left(-\beta_1\right)^{k_1} \ldots \left(-\beta_p\right)^{k_p}}{k_1! \ldots k_p!} Y_n^{(k_1-n, \ldots, k_p-n)}\left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{n_1}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p \right) J_0\left(2\sqrt{\beta_1 u_1}, \ldots, 2\sqrt{\beta_p u_p} \right) du_1 \ldots du_p \tag{3.27}$$

$$\sum_{k_1=0}^\infty \ldots \sum_{k_p=0}^\infty \frac{\left(-\beta_1\right)^{k_1} \ldots \left(-\beta_p\right)^{k_p}}{k_1! \ldots k_p!} Y_{1/2}^{(k_1, \ldots, k_p)}\left(x_1, \ldots, x_p \right)$$

$$= \left[\left(\sqrt{\pi}\right)^p \left(\sqrt{\beta_1}, \ldots, \sqrt{\beta_p} \right) \right]^{-1}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^\infty \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2} \right)^{1/2}$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p \right) \left[\sin\left(2\sqrt{\beta_1 u_1} \right) \ldots, \sin\left(2\sqrt{\beta_p u_p} \right) \right]$$

$$\times du_1 \ldots du_p \tag{3.28}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{\left(-\beta_1\right)^{k_1} \cdots \left(-\beta_p\right)^{k_p-1}}{k_1! \cdots k_p!} Y_{-1/2}^{(k_1, \ldots, k_p)}\left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \left(\sqrt{\pi}\right)^{-p} \int_0^{\infty} \cdots (p - \text{समाकल}) \cdots \int_0^{\infty} \left(u_1 \cdots u_p\right)^{-1/2}$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \cdots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-u_1 - \cdots - u_p\right)$$

$$\times \left[\cos\left(2\sqrt{\beta_1 u_1}\right) \cdots \cos\left(2\sqrt{\beta_p u_p}\right)\right] du_1 \cdots du_p \quad (3.29)$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{(-n)_{k_1+\cdots+k_p} (1+n)_{k_1} \cdots (1+n)_{k_p}}{k_1! \cdots k_p!}$$

$$\times Y_n^{(k_1-1, \ldots, k_p-1)}\left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \cdots (p - \text{समाकल}) \cdots \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \cdots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^n$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \cdots - u_p\right) P_n\left(1 - 2u_1, \ldots, 1 - 2u_p\right) du_1 \cdots du_p$$

(3.30)

$$= \int_0^{\infty} \cdots (p - \text{समाकल}) \cdots \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \cdots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^n$$

$$\times \exp\left(-u_1 - \cdots - u_p\right) C_n^{\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)}\left(1 - 2u_1, \ldots, 1 - 2u_p\right)$$

$$\times du_1 \cdots du_p \quad (3.31)$$

जहाँ सूत्र (3.8), (3.9), (3.20) के दाहिने पक्ष में आये फलन $J_n(x)$ एक चर का प्रचलित बेसल फलन है; सूत्र 3.26), (3.27) के दाहिने **पक्ष में** आये फलन $J_n(x_1, \ldots, x_p)$ एक बहुचरीय बेसल फलन है जिसको लेखक द्वारा परिभाषित किया गया है [20, eq (2.1), p. 181] ; सूत्र (3.14), (3.15), (3.25) के दाहिने पक्ष में आये फलन $P_n(x)$ एक चर का प्रचलित लेजेन्ड्रे बहुपद है तथा सूत्र (3.30), (3.31) के दाहिने पक्ष में आये फलन क्रमशः बहुचरी लेजेन्ड्रे एवं बहुचरी गेगनबर बहुपद है ज़िनको लेखक द्वारा परिभाषित किया गया है [19, eq (30), p.68]; सूत्र (3.16), (3.17), (3.18) के दाहिने पक्ष में आये फलन क्रमशः एकचरीय लॉगेर एवं हरमाइट बहुपद है [14, eq (1), p.200, eq (2), p.187]।

सूत्र (3.1) की उपपत्ति : दाहिने पक्ष में द्विपद प्रसार और चरघातांकी प्रसार अर्थात्

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{n!} \tag{3.32}$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.33}$$

का प्रयोग करने पर हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_p=0}^{\infty}$$

$$\times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \cdots (1+\alpha_1)_{r_p} \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{x}{2}\right)^{r_p} t^{n_1+r_1+\ldots+r_p}}{n_1!\, r_1! \ldots r_p!}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}}$$

$$\times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \cdots (1+\alpha_1)_{r_p} \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{x_1}{2}\right)^{r_p} t^{n_1}}{\left(n_1 - r_1 - \ldots - r_p\right)!\, r_1! \ldots r_p!}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_p-1}$$

$$\times \frac{(-n_1)_{r_1+\ldots+r_p} (1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_1)_{r_p} \left(\frac{-x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{-x_1}{2}\right)^{r_p} t^{n_1}}{n_1!\, r_1! \ldots r_p!}$$

ग्रीय बेसल बहुपद की परीभाषा (1.12) का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.1) की प्राप्ति होती है।

सूत्र (3.2) की उपपत्ति : दाहिने पक्ष में द्विपद प्रसार (3.32) एवं चरघातांकी प्रसार (3.33) का ग कर हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_{p-1}=0}^{\infty} \times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_2)_{r_{p-1}} \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{x_2}{2}\right)^{r_{p-1}} t^{n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}}}{n_1!\, r_1! \ldots r_{p-1}!}$$

$$\times \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2x_1 t}}\right)^{n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}+\alpha_1} \left(1-2x_1 t\right)^{1/2}$$

त सूत्र 14, exp. (10), p.70] अर्थात्

$$\left(1-z\right)^{-1/2} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2r-1} = {}_2F_1\left(r, r+\frac{1}{2}; 2r; z\right) \tag{3.34}$$

ा प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_p=0}^{\infty} \times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_2)_{r_{p-1}} \left(\frac{n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}+\alpha_1+1}{2}\right)_{r_1} \left(\frac{n_1+r_1+\ldots+r_p+\alpha_1+2}{2}\right)_{r_p}}{\left(n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}+\alpha_1+1\right)_{r_p}}$$

$$\times \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{x_2}{2}\right)^{r_{p-1}} \left(2x_1\right)^{r_p} t^{n_1+r_1+\ldots+r_p}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_p=0}^{\infty}$$

$$\times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_2)_{r_{p-1}} \left(n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}+\alpha_1+1\right)_{2r_p}}{n_1!\; r_1! \ldots r_p! \left(n_1+r_1+\ldots+r_{p-1}+\alpha_1+1\right)_{r_p}}$$

$$\times \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{x_1}{2}\right)^{r_p} t^{n_1+r_1+\ldots+r_p}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \ldots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}}$$

$$\times \frac{(1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_2)_{r_{p-1}} \left(n_1-r_p+\alpha_1+1\right)_{2r_p}}{\left(n_1-r_1-\ldots-r_p\right)!\; r_1! \ldots r_p! \left(n_1-r_p+\alpha_1+1\right)_{r_p}}$$

$$\times \left(\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{x_1}{2}\right)^{r_p} t^{n_1}$$

ज्ञात सूत्र [14, exp (8), p.32] i.e.

$$(n-k)! = \frac{(-1)^k\, n!}{(-1)_k} \tag{3.35}$$

का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \ldots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}}$$

$$\times \frac{(-n_1)_{r_1+\ldots+r_p} (1+\alpha_p)_{r_1} \ldots (1+\alpha_2)_{r_{p-1}} \left(1+\alpha_1+n_1\right)_{r_p}}{n_1!\; r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \left(-\frac{x_p}{2}\right)^{r_1} \ldots \left(-\frac{x_1}{2}\right)^{r_p} t^{n_1}$$

अब बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग करने पर वांछित सूत्र (3.2) प्राप्त ा है।

इसी प्रकार सूत्र (3.3), (3.4), (3.5) को सिद्ध किया जा सकता है। सूत्र (3.4), (3.5) में सूत्र 34) का प्रयोग न होकर पुनः द्विपद प्रसार (3.32) का प्रयोग करना पड़ता है।

सूत्र (3.6) की उपपत्ति : वाम पक्ष में बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग रने पर हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}}$$

$$\times \frac{(-\beta)^k (-n_1)_{r_1+\ldots+r_p} (1+\alpha_1+n_1)_{r_p} \ldots (1+\alpha_{p-1}+n_{p-1})_{r_2} (1+k)_{r_1}}{r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \left(-\frac{x}{2}\right)^{r_p} \ldots \left(-\frac{x_p}{2}\right)^{r_1}$$

ूँकि

$$(1+k)_{r_1} = \frac{\Gamma(1+k+r_1)}{\Gamma(1+k)} = \frac{(1+r_1)_k \, \Gamma(1+r_1)}{k!} = \frac{(1+r_1)_k \, (1)_{r_1}}{k!}$$

एवं

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+r_1)_k (-\beta)^k}{k!} = (1+\beta)^{-1-r_1}$$

अतः उपरोक्त संबंध निम्न में परिवर्तित हो जाता है :

$$\frac{1}{1+\beta} \sum_{r_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{r_2=0}^{n_1-r_1} \cdots \sum_{x_p=0}^{n_1-r_1-\ldots-r_{p-1}}$$

$$\times \frac{(-n_1)_{r_1+\ldots+r_p} (1+\alpha_1+n_1)_{r_p} \ldots (1+\alpha_{p-1}+n_{p-1})_{r_2} \left(1-n_p+n_p\right)_{r_1}}{r_1! \ldots r_p!}$$

$$\times \left(-\frac{x_1}{2}\right)^{r_p} \ldots \left(-\frac{x_{p-1}}{2}\right)^{r_2} \left(-\frac{x_p}{2(1+\beta)}\right)^{r_1}$$

अब पुनः बहुचरीय बेसल बहुपद की परिभाषा (1.12) का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.6) प्राप्त होता है। इसी प्रकार सूत्र (3.7) एवं (3.19) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (3.8) की उपपत्ति : सूत्र (2.1) से α_p के स्थान पर $(k-n_p)$ रखने और दोनों ओर श्रेणी—

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!}$$

का गुणा करने पर तथा प्राप्त दाहिने पक्ष में श्रेणी एवं समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} Y_{n_1, \ldots, n_p}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, k-n_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha_1+n_1\right) \ldots \Gamma\left(1+\alpha_{p-1}+n_{p-1}\right)}$$

$$\times \int_0^{\infty} \ldots (p-\text{समाकल}) \ldots \int_0^{\infty} \left(u_1^{\alpha_1+n_1} \ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1}+n_{p-1}}\right)$$

$$\times \left(1+\frac{x_1 u_1}{2}+\ldots+\frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta u_p)^k}{k! \ (1)_k} du_1 \ldots du_p$$

अब बेसल फलन की परिभाषा [14, eq (1).p.109] का उपयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.8) प्राप्त होता है। इसी प्रकार सूत्र (3.9) एवं (3.20) को सहजता से सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (3.10) की उपपत्ति : उपरोक्त (3.8) का अनुसरण करने पर परंतु np के स्थान पर $(2k-n_p)$ रखने एवं श्रेणी $\sum_{k=0}^{\infty} (-\beta^2)^k$ का गुणा करने एवं $\cos\theta$ की श्रेणी अर्थात्

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!}$$

का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.10) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार सूत्र (3.11) से (3.13), (3.21) से (3.24) को सहजता से सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (3.14) की उपपत्ति : सूत्र (2.1) में α_p के स्थान पर $(k-n_p)$ रखने और दोनों ओर श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_p)_k\,(n_p+1)_k}{k!}$$

का गुणा कर तथा दाहिने पक्ष में श्रेणी एवं समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n_p)_k\,(n_p+1)_k}{k!}\, Y_{n_1,\ldots,n_p}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},k-n_p)}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1+\alpha_1+n_1\right)\ldots\Gamma\left(1+\alpha_{p-1}+n_{p-1}\right)}$$

$$\times \int_0^{\infty}\ldots(p-\text{समाकल})\ldots\int_0^{\infty}\left(u_1^{\alpha_1+n_1}\ldots u_{p-1}^{\alpha_{p-1}+n_{p-1}}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{x_1u_1}{2}+\ldots+\frac{x_pu_p}{2}\right)^{n_1}.\exp\left(-u_1-\ldots-u_p\right)$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n_p)_k\,(n_p+1)_k}{k!}\left(u_p\right)^k du_1\ldots du_p$$

दाहिने पक्ष में लेजेन्ड्रे बहुपद की परिभाषा [14, eq (2), p.157] का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.14) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार सूत्र से (3.15) से (3.18) एवं (3.25) को भी सहजता से सिद्ध किया जा सकता है। सूत्र (3.16) से लॉगेरे बहुपद की परिभाषा [14, eq (1), p.200] का प्रयोग सूत्र (3.16) में ज्ञात संबंध [14, exp (1), p.216] का प्रयोग करने पर सूत्र (3.17) एवं (3.18) की प्राप्ति होती है।

सूत्र (3.26) की उपपत्ति : सूत्र (2.1) में α_i को k_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ से प्रतिस्थापित करने, $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$ रखने तथा दोनों ओर श्रेणी

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=0}^{\infty}\frac{(-\beta_1)^{k_1}\ldots(-\beta_p)^{k_p}}{k!\ldots k_p!}$$

का गुणा करके, दाहिने पक्ष में श्रेणी एवं समाकल का क्रम बदलने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^{k_1} \cdots (-\beta_p)^{k_p}}{k! \cdots k_p!} Y_n^{(k_1, \ldots, k_p)} \left(x_1, \ldots, x_p\right)$$

$$= \int_0^\infty \cdots (p-\text{समाकल}) \cdots \int_0^\infty \left(u_1 \cdots u_p\right)^n$$

$$\times \left(1 + \frac{x_1 u_1}{2} + \ldots + \frac{x_p u_p}{2}\right)^{n_1} . \exp\left(-u_1 - \ldots - u_p\right)$$

$$\times \left(\frac{1}{n!}\right)^p \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_p} (\beta_1 u_1)^{k_1} \cdots (\beta_p u_p)^{k_p}}{k_1! \cdots k_p! \, (1+n)_{n_1} \cdots (1+n)_{k_p}} du_1 \cdots du_p$$

दाहिनी ओर लेखक द्वारा परिभाषित बेसल फलन की परिभाषा [20, eq (2.1), p.181] का प्रयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (3.26) प्राप्त होता है।

सूत्र (3.26) में

$$n = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

क्रमशः रखने पर एवं संबंध [18, eq (2.1), p.181, eq (3.11), p.183, eq (3.12), p. 183] का प्रयोग करने पर हमें सूत्र (3.27), (3.28), (3.29) प्राप्त होंगे।

सूत्र (3.31) एवं (3.31) की उपपत्ति : सूत्र (2.1) में αi के स्थान पर $({}_{ki} - n)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ रखने, दोनों ओर श्रेणी

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{(-n)_{k_1+\ldots+k_p} (1+n)_{k_1} \cdots (1+n)_{k_p}}{k! \cdots k_p!}$$

का गुणा करने तथा दाहिने पक्ष में श्रेणी एवं समाकल का क्रम बदलकर ज्ञात सूत्र लेखक द्वारा परिभाषित बहुचरीय लेजेन्ड्रे बहुपद [19, eq (30), p.68] का प्रयोग करने पर वांछित दोनों सूत्र (3.30), (3.31) प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू.जी.सी. (सी.आर.ओ.) इन्डिया के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है जहाँ से लेखक को शोध परियोजना के रूप में वित्तीय सहायता प्राप्त हुई।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर. पी. : J. Math. 1954, 6, 410-415.
2. अल-सलाम, डब्लू. ए. : Duke J. Math. 1957, 24, 529-545.
3. ब्राफमैन, एफ. : Proc. Amer, Math, Soc. 1953, 4, 275-277.
4. बर्चनाल, जे. एल. : Canadian J. Math. 1951, 3, 62-68.
5. कॉर्लिट्ज, एल. : Duke J. Math. 1957, 24, 151-162.
6. चटर्जी, एस. : Duke J. Math. 1965, 32, 563-564.
7. डिकिन्सन, डी. : Proc. Amer. Math. Soc. 1954, 5, 946-956.
8. अर्दली, ए. आदि : HTF I, McGraw-Hill, NY (1954).
9. एवेडा, एम. टी. : Math. Zeithschr. 1960, 74, 319-324.
10. ग्रासवाल्ड, ई. : Trans. Amer, Math. Soc. 1951, 71, 197-210.
11. ग्रासवाल्ड ई. : The Bessel polynomials, Lecture Notes in Math., Springer, NY (1978).
12. क्रॉल, एच. एल. तथा फ्रिन्क, ओ. : Trans. Amer. Math. Soc. 1949, 65, 100-115.
13. रेनविले, ई. डी. : Canadian, J. Math. 1953, 5, 104-106.
14. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, MacMillan Co. NY (1967).
15. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. : Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1969, 31, 449-457.
16. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी. : The H-function of One an Two Variables with Applications, South Asian Publ. New Delhi (1982).
17. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating functions, John Willey and Sons, Halsted Press, NY (1984).
18. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कार्लसन, पी. डब्लू. : Multile Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press, NY (1985).
19. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Int. Trans. Sp. Fucnt 2000, 10-1, 61-70.

20. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Acta Ciencia Indica, 2001, 27 M-2, 181-184.

21. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math. 2002, 24-1.

22. श्रीवास्तव एच. एस. पी. : On Bessel polynomials of several variables (प्रकाशनाधीन).

23. टॉसकानी, एल. : Le Mat. 1955, 10, 121-133.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 2, April 2002.

I-फलन वाले कुछ सान्त द्विगुण समाकल सूत्र

कु. रीनू श्रीवास्तव
गणित विभाग, गवर्नमेंट मॉडल साइंस कालेज, रीवाँ (म. प्र.)

[प्राप्त — जनवरी 21, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम बहुपदों के द्विलाम्बिक युग्म के विभिन्न गुणनफलों, बहुपदों की एक सामान्य श्रेणी तथा सामान्य आर्गुमेंट वाले I-फलन वाले तीन सान्त द्विगुण समाकलों का मान ज्ञात करेंगे।

Abstract

Some finite double integral formulas involving I-function. *By* Ku. Rinu Shrivastava Departtment of Mathematics, Government Model Science College, Rewa (M.P.).

In the present paper we evaluate three finite double integrals involving various products of biorthogonal pair of polynomials, a general classs of polynomials, and I-function with general arguments. Our integrals are quite general in character and a number of integrals can be deduced as particular cases. Some interesting special cases of our main results have been discussed briefly.

1. प्रस्तावना

एक चरवाले I-फलन को सक्सेना[1] द्वारा परिभाषित किया जा चुका है जिसे हम निम्नांकित विधि से लिखेंगे–

$$I^{m,n}_{p_i, q_i : r}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix} \ldots, \ldots \\ \ldots, \ldots \end{matrix}\right]$$

$$= I^{m,n}_{p_i, q_i : r}\left[x \left| \begin{matrix} [(a_j, \alpha_j)_{1,n}], [(a_{ji}, \alpha_{ji})_{n+1, p_i}] \\ [(b_j, \beta_j)_{1,m}], [(b_{ji}, \beta_{ji})_{m+1, q_i}] \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi w} \int_L \theta(s) x^s \, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(b_j - \beta_j s\right) \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j + \alpha_j s\right)}{\sum_{i=1}^{r} \left[\prod_{j=m+1}^{q_i} \Gamma\left(1 - b_{ji} + \beta_{ji} s\right) \prod_{j=n+1}^{p_i} \Gamma\left(a_{ji} - \alpha_{ji} s\right) \right]}$$

समाकल (1.1) अभिसारी होता है जब $B > 0, A \leq 0$ जहाँ

$$B = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{j=n+1}^{p_i} \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q_i} \beta_{ji} \tag{1.2}$$

$$A = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ji} - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji} \tag{1.3}$$

$$|\arg x| < \frac{1}{2} B\pi, \ \forall i \ \varepsilon \ (1, 2, \ldots, r) \tag{1.4}$$

इस प्रपत्र में आये बहुपदों के द्विलाम्बिक युग्मों को निम्नलिखित ढंग से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया गया है[2]–

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x ; k)$$

$$= \frac{(\alpha + 1)_{kn}}{n!} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \frac{(\alpha + \beta + n + 1)_{kl}}{(\alpha + 1)_{kl}} \left(\frac{1 - x}{2}\right)^{kl} \tag{1.5}$$

तथा

$$K_n^{(\alpha_1 \beta)}(x\,;\,k) = \frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l \binom{\beta+n}{l}\left(\frac{x-1}{2}\right)^l \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-l}$$

$$\times \sum_{w=0}^{l}(-1)^w \binom{l}{w}\left(\frac{\alpha+w+1}{k}\right)_n \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Re}(\alpha) > -1,\ \mathrm{Re}(\beta) > -1$$

जब $k = 1$ तो $J_n^{(\alpha_1;\beta)}(x\,;\,k)$ एवं $K_u^{(\alpha_1;\beta)}(x\,;\,k)$ दोनों जैकोबी बहुपदों में समानीत हो जाते हैं। (देखें श्रीवास्तव तथा मनोचा [3, p. 197, प्रमेय (64)]।

श्रीवास्तव [4, p.1, Eq. (1)] ने बहुपदों को सामान्य श्रेणी (देखें श्रीवास्तव तथा सिंह भी[5]) को निम्नवत् प्रचारित किया है–

$$S_n^m(x) = \sum_{u=0}^{[n/m]} \frac{(-n)_{mu}}{u!} A_{n,u}\, x^u \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

जहाँ m याहच्छिक धन पूर्णांक है तथा गुणांक $A_{n,u}$ $(n,\ u \geq 0)$ याहच्छिक अचर है जो वास्तविक या संमिश्र हैं।

2. मुख्य समाकल

हम निम्नांकित तीन सामान्य द्विगुण समाकलों का मान निकालेंगे–

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\, y^{\rho-1}(1-y)^{a-2\rho}(1+ty)^{\rho-a-1}$$

$$\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b\,; \\ 1+a-b\,; \end{matrix}\ \frac{(1+t)y}{1+ty}\right]$$

$$\times\ J_s^{(\alpha_1 \beta)}(1-2x\,;\,k)\ S_n^m\left[c y^{\gamma}(1+ty)^{\gamma}(1-y)^{-2\gamma}\right]$$

$$\times\ I_{\rho_i, Q_i : r}^{M, N}\left[z x^{\sigma}(1-x)^{v}\left\{\frac{y(1+ty)}{(1-y)^2}\right\}^T \left|\begin{matrix}\ldots,\ldots \\ \ldots,\ldots\end{matrix}\right.\right] dx\, dy$$

$$= \frac{2^{\alpha}\{4(1+t)\}^{-\rho}\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\,(a+1)_{ks}}{\sqrt{x}\,\Gamma(1+a)\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)s!}$$

$$\times \sum_{u=0}^{[n/m]}\sum_{l=0}^{s}\frac{(-n)_{mu}\,(\alpha+\beta+s+1)_{kl}(-s)_l\,c^u}{u!\,(\alpha+1)_{kl}\,l!\,\{4(1+t)\}^{\gamma u}}\,A_{n,u}$$

$$\times I^{M+2,N+3}_{\rho_i+4,Q_i+3:r}\left[z\{4(1+t)\}^{-T}\,\middle|\,\begin{array}{l}(1-\mu,\nu),(1-\lambda-kl,\sigma),\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\rho-\gamma u,T\right),\end{array}\right.$$

$$\left.\times\begin{array}{l}(1-\rho-\gamma u,T),\ldots,\ldots,(1+a-b-\rho-\gamma u,T),\\ \left(1+\frac{a}{2}-b-\rho-\gamma u,T\right),\ldots,\ldots,(1-\lambda-\mu-kl,\sigma+\nu)\end{array}\right] \quad (2.1)$$

समाकल (2.1) वैध है यदि निम्नांकित प्रतिबंधों की तुष्टि हो–

(i) m याद्दच्छिक धन पूर्णांक है तथा गुणांक $A_{n,u}$ $(n,\ u \geq 0)$ याद्दच्छिक वास्तविक या संमिश्र अचर हैं।

(ii) $B = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - \sum_{j=N+1}^{\rho_i}\alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{M}\beta_j - \sum_{j=M+1}^{Q_i}\beta_{ji} > 0,\ |\arg z| < \frac{1}{2}B\pi$

(iii) $\mathrm{Re}(1+a-b) > 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > -1,\ \mathrm{Re}(\beta) > -1,\ \gamma \geq 0,$

$\mathrm{Re}(\lambda+\sigma\xi) \geq 0,\ t > -1,\ \mathrm{Re}(\mu+\nu\xi) > 0,\ \mathrm{Re}(\rho+\gamma u+T\xi) > 0,$

$\mathrm{Re}(1+a-2\rho-2\gamma u-2T\xi) > 0$

जहाँ

$$\xi = \min_{1\leq i\leq m}\mathrm{Re}\left(b_j/B_j\right) \quad \text{तथा} \quad u = 0, 1, 2, \ldots, [n/m]$$

(iv) $\mathrm{Re}(1-2b) > 0$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} y^{\rho-1} (1+ty)^{\rho-a-1} (1-y)^{a-2\rho}$$

$$\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, b; \\ \frac{a}{2}+1+a-b; \end{matrix} \frac{(1+t)y}{1+ty} \right]$$

$$\times J_s^{(\alpha, \beta)} (1-2x; k) \, S_n^m \left[c y^{\gamma} (1+ty)^{\gamma} (1-y)^{-2\gamma} \right]$$

$$\times I_{\rho_i, Q_i : r}^{M, N} \left[z x^{\sigma} (1-x)^{\nu} \left\{ \frac{y(1+ty)}{(1-y)^2} \right\}^T \middle| \begin{matrix} \ldots, \ldots \\ \ldots, \ldots \end{matrix} \right] dx \, dy$$

$$= \frac{2^{\alpha} \{4(1+t)\}^{-\rho} \Gamma(1+a-b) (\alpha+1)_{ks}}{\sqrt{\pi} \, \Gamma(1+a) \, s!}$$

$$\times \sum_{u=0}^{[n/m]} \sum_{l=0}^{s} \frac{(-n)_{mu} (\alpha+\beta+s+1)_{kl} (-s)_l \, c^u}{u! \, (\alpha+1)_{kl} \, l! \, \{4(1+t)\}^{\gamma u}} A_{n,u}$$

$$\times I_{\rho_i+4, Q_i+3 : r}^{M+2, N+3} \left[z \{4(1+t)\}^{-T} \middle| \begin{matrix} (1-\mu, \nu), (1-\lambda-kl, \sigma), \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \rho - \gamma u, T \right), \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1-\rho-\gamma u, T), \ldots, \ldots, (1+a-b-\rho-\gamma u, T), \\ \left(1 + \frac{a}{2} - \rho - \gamma u, T \right), \ldots, \ldots, (1-\lambda-\mu-kl, \sigma+\nu) \end{matrix} \right] \tag{2.2}$$

अपरंच, (2.2) की वैधता के प्रतिबंध (2.1) में उल्लिखित प्रतिबंधों जैसे हैं, अन्तर इतना ही है कि यहाँ पर $\text{Re}(1-2b) > 0$ के स्थान पर $0 \le b < 1$ होता है।

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} y^{\rho-1} (1+ty)^{\rho-a-1} (1-y)^{a-2\rho}$$

$$\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, c, d; \\ \frac{a}{2}, 1+a-c, 1+a-d; \end{matrix} \frac{(1+t)y}{1+ty} \right]$$

$$\times J_s^{(\alpha_1 \beta)} (1-2x; k)\, S_n^m \left[c y^{\gamma} (1+ty)^{\gamma} (1-y)^{-2\gamma} \right]$$

$$\times I_{\rho_i, Q_i : r}^{M,N} \left[z x^{\sigma} (1-x)^{v} \left\{ \frac{y(1+ty)}{(1-y)^2} \right\}^{T} \middle| \begin{matrix} \dots, \dots \\ \dots, \dots \end{matrix} \right] dx\, dy$$

$$= \frac{2^{\alpha} \{4(1+t)\}^{-\rho} \Gamma(1+a-c)\, \Gamma(1+a-d)\, (\alpha+1)_{ks}}{\sqrt{x}\, \Gamma(1+a)\, \Gamma(1+a-c-d)\, s!}$$

$$\times \sum_{u=0}^{[m/n]} \sum_{l=0}^{s} \frac{(-n)_{mu} (\alpha+\beta+s+1)_{kl} (-s)_l\, c^u}{u!\, (\alpha+1)_{kl}\, l!\, \{4(1+t)\}^{u\gamma}} A_{n,u}$$

$$\times I_{\rho_i+5, Q_i+4 : r}^{M+3, N+3} \left[z \{4(1+t)\}^{-T} \middle| \begin{matrix} (1-\mu, v), (1-\lambda-kl, \sigma), \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \rho - \gamma u, T \right), \end{matrix} \right.$$

$$\times \begin{matrix} (1-\rho-\gamma u, T), \dots, \dots, (1+a-c-\rho-\gamma u, T), \\ \left(1 + \frac{a}{2} - \rho - \gamma u, T \right), (1+c-d-\rho-\gamma u, T), \dots, \dots, \end{matrix}$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1+a-d-\rho-\gamma u, T) \\ (1-\lambda-\mu-kl, \sigma+v) \end{matrix} \right] \tag{2.3}$$

समाकल (2-3) वैध होता है यदि निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि है–

(i) $\text{Re}(1 + a - c) > 0$, $\text{Re}(1 + a - 2c - 2d) > 0$, $\text{Re}(1 + a - d) > 0$

(ii) (2.1) में उल्लिखित (i) से होकर (iii) तक के प्रतिबंधों का समूह भी सही है।

उपपत्तियाँ

(2.1) को स्थापित करने के लिए इसके बाम पक्ष में हम (1.7) में दिये गये $S_n^m(x)$ के निरूपणों की श्रेणी का प्रयोग करते हैं तथा I-फलन के लिए हम (1.1) में दिये गये कंटूर समाकल के मेलिन-बार्नीज प्रकारों का इस्तेमाल करते हैं और समाकलन संकलन के क्रम को बदलते हैं जो (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। तो हमें निम्नवत् प्राप्त होता है–

(2.1) का वाम पार्श्व

$$= \sum_{u=0}^{[n/m]} \frac{(-n)_{mu}}{u!} c^u A_{n,u}$$

$$\times \int_L \left[\phi(\xi) z^{\xi} \int_0^1 x^{\lambda+\sigma\xi-1} (1-x)^{\mu+\nu\xi-1} J_s^{(\alpha_1 \beta)} (1-2x; k)\, dx \right.$$

$$\times \int_0^1 y^{\rho+\gamma u+T\xi-1} (1-y)^{a-2T\xi-2\gamma u-2\rho} (1+ty)^{\rho-a+\gamma u+T\xi-1}$$

$$\left. \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b; \\ 1+a-b; \end{matrix} \frac{(1+t)y}{1+ty} \right] dy \right] d\xi$$

अब ज्ञात परिणामों [6, p. 118, Eq (3.3)] एवं [7, p. 254, Eq. (2.1)] का प्रयोग करते हुए तथा परिणामी कंटूर समाकल की व्याख्या I-फलन के रूप में करने पर हमें तुरन्त ही (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

द्वितीय तथा तृतीय समाकलों की उपपत्तियाँ प्रथम समाकल की ही भाँति हैं अन्तर केवल इतना ही है कि हम [7, p. 254, Eq (2.1)] के स्थान पर क्रमशः ज्ञात समाकलों [7, p. 254, Eq. (2.2)] एवं [7, p. 255, Eq. (2.3)] का उपयोग करते हैं।

3. विशिष्ट दशाएं

(i) यदि हम (2.1) में $m = 1$ तथा

$$A_{n,u} = \frac{(\alpha' + 1)_n \, (\alpha' + \beta' + n + 1)_u}{n! \, (\beta' + 1)_u}$$

रखें तो $S'_n(x) \to P_n^{(\alpha', \beta')}(1 - 2x)$, परिणामस्वरूप हमें निम्नांकित रोचक समाकल मिलता है—

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{\lambda-1} (1 - x)^{\mu-1} y^{\rho-1} (1 - y)^{a-2\rho} (1 + ty)^{\rho-a-1}$$

$$\times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b; \\ 1 + a - b; \end{matrix} \; \frac{(1 + t)y}{1 + ty} \right]$$

$$\times J_s^{(\alpha, \beta)}(1 + 2x; k) \, P_n^{(\alpha', \beta')} \left[1 - 2 \left\{ c y^{\gamma} (1 - y)^{-2\gamma} (1 + ty)^{\gamma} \right\} \right]$$

$$\times I^{M,N}_{\rho_i, Q_i : r} \left[z x^{\sigma} (1 - x)^{\partial} \left\{ \frac{y(1 + ty)}{(1 - y)^2} \right\}^T \middle| \begin{matrix} \ldots, \ldots \\ \ldots, \ldots \end{matrix} \right] dx \, dy$$

$$= \frac{2^{\alpha} \{4(1 + t)\}^{-\rho} \, \Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right) \Gamma(1 + a - b)}{\sqrt{x} \, \Gamma(1 + a) \, \Gamma\left(1 + \frac{a}{2} - b\right)} \frac{(\alpha + 1)_{ks}}{s!} \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}$$

$$\times \sum_{u=0}^{n} \sum_{l=0}^{s} \frac{(-n)_u}{u! \, l!} \frac{(\alpha' + \beta' + n + 1)_u}{(\beta' + 1)_u} (-1)^l \frac{(\alpha + \beta + s + 1)_{kl}}{(\alpha + 1)_{kl} \{4(1 + t)\}^{\gamma u}}$$

$$\times I^{M+2, N+3}_{\rho_i+4, Q_i+3 : r} \left[z \{4(1 + t)\}^{-T} \middle| \begin{matrix} (1 - \mu, \nu), (1 - \lambda - kl, \sigma), \\ \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \rho - \gamma u, T\right), \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1 - \rho - \gamma u, T), \ldots, \ldots, (1 + a - b - \rho - \gamma u, T), \\ \left(1 + \frac{a}{2} - b - \rho - \gamma u, T\right), \ldots, \ldots, (1 - \lambda - \mu - kl, \sigma + \nu) \end{matrix} \right] \tag{3.1}$$

जहाँ (2.1) में बताये गये (1) से (IV) तक के प्रतिबन्धों के समूहों की तुष्टि होती है।

(ii) यदि हम (3.1) में $k=1$ रखें तो

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1} y^{\rho-1}(1+ty)^{\rho-a-1}(1-y)^{a-2\rho}$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b\,; \\ 1+a-b\,; \end{matrix}\ \frac{(1+t)y}{1+ty}\right]$$

$$\times \rho_n^{(\alpha_1\beta)}(1-2x)\ \rho_n^{(\alpha',\beta')}\left[2-2cy^{\gamma}(1+ty)^{\gamma}(1-y)^{-2\gamma}\right]$$

$$\times I^{M,N}_{\rho_i,Q_i:r}\left[zx^{\sigma}(1-x)^{\gamma}\left\{\frac{y(1+ty)}{(1+y)^2}\right\}^T\ \middle|\ \begin{matrix}\ldots,\ldots \\ \ldots,\ldots\end{matrix}\right] dx\,dy$$

$$= \frac{2^{\alpha}\{4(1+t)\}^{-\rho}\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\,(\alpha+1)_s\,(\alpha+1)_n}{\sqrt{x}\,\Gamma(1+a)\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)s!\,n!}$$

$$\times \sum_{u=0}^{n}\sum_{l=0}^{s}\frac{(-n)_u(\alpha'+\beta'+n+1)_u(\alpha+\beta+s+1)_l\,c^u}{(\beta'+1)_u(\alpha+1)_l\{4(1+t)\}^{\gamma u}}$$

$$\times I^{M+2,N+3}_{\rho_i+4,Q_i+3:r}\left[z\{4(1+t)\}^{-T}\ \middle|\ \begin{matrix}(1-\mu, v),(1-\lambda-l,\sigma), \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\rho-\gamma u, T\right),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times\ \begin{matrix}(1-\rho-\gamma u, T),\ldots,\ldots,(1+a-b-\lambda-\gamma u, T), \\ \left(1+\frac{a}{2}-b-\rho-\gamma u, T\right),\ldots,\ldots,(1-\lambda-\mu-l,\sigma+v)\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

(iii) पुनः (2.1) में $n=\gamma=0$ रखें तो $S_n^m(x)$ $A_{0,0'}$ में समानीत हो जाता है और हमें निम्नांकित द्विगुण समाकल प्राप्त होता है और वह भी नवीन प्रतीत होता है—

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\, y^{\rho-1}(1+ty)^{\rho-a-1}(1-y)^{a-2\rho}$$

$$\times\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b\ ; \\ 1+a-b\ ; \end{matrix}\ \frac{(1+t)y}{1+ty}\right] J_s^{(\alpha_1\beta)}(1-2x\,;\,k)$$

$$\times\, I^{M,N}_{\rho_i,Q_i:r}\left[zx^{\sigma}(1-x)^{\partial}\left\{\frac{y(1+ty)}{(1-y)^2}\right\}^T \,\middle|\, \begin{matrix}\dots,\dots\\ \dots,\dots\end{matrix}\right] dx\,dy$$

$$=\frac{2^{\alpha}\{4(1+t)\}^{-\rho}\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\,(\alpha+1)_{ks}}{\sqrt{x}\,\Gamma(1+a)\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)s\,!}$$

$$\times\sum_{l=0}^{s}\frac{(\alpha+\beta+s+1)_{kl}\,(-s)}{(\alpha+1)_{kl}\,l\,!}$$

$$\times\, I^{M+2,N+3}_{\rho_i+4,Q_i+3:r}\left[z\{4(1+t)\}^{-T}\,\middle|\, \begin{matrix}(1-\mu,\ v),(1-\lambda-kl,\ \sigma),\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\rho,\ T\right),\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}(1-\rho,\ T),\ \dots,\ \dots,\ (1+a-b-\rho,\ T),\\ \left(1+\frac{a}{2}-b-\rho,\ T\right),\ \dots,\ \dots,\ (1-\lambda-\mu-kl,\ \sigma+v)\end{matrix}\right] \tag{3.3}$$

(iv) अन्त में यदि हम (2.1) में $\sigma,\ v\to 0$ रखें और प्राप्त हुए व्यंजक में x समाकल का मान ज्ञात करें तो हमें निम्नांकित एकल समाकल प्राप्त होता है—

$$\int_0^1 y^{\rho-1}(1-y)^{a-2\rho}(1+ty)^{\rho-a-1}$$

$$\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ b\ ; \\ 1+a-b\ ; \end{matrix}\ \frac{(1+t)y}{1+ty}\right] S_n^m\left[c y^{\gamma}(1+ty)^{\gamma}\cdot(1-y)^{-2\gamma}\right]$$

$$\times\ I^{M,N}_{\rho_i,Q_i:r}\left[\left\{\frac{y(1+tu)}{(1-y)^2}\right\}^T\left|\begin{matrix}\ldots,\ldots\\ \ldots,\ldots\end{matrix}\right.\right]dy$$

$$=\frac{2^{\alpha}\{4(1+t)\}^{-\rho}\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\,\Gamma(\mu)}{\sqrt{x}\,\Gamma(1+a)\,\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}$$

$$\times\sum_{u=0}^{[n/m]}\frac{(-n)_{mu}\,c^u}{u!\,\{4(1+t)\}^{u\gamma}}A_{n,u}$$

$$\times\ I^{M+2,N+1}_{\rho_i+2,Q_i+2:\gamma}\left[z\{4(1+t)\}^{-T}\left|\begin{matrix}(1-\rho-\gamma u,\ T),\ \ldots,\ \ldots,\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\rho-\gamma u,\ T\right),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}(1+a-b-\rho-\gamma u,\ T),\\ \left(1+\frac{a}{2}-b-\rho-\gamma u,\ T\right),\ \ldots,\ \ldots,\end{matrix}\right] \tag{3.4}$$

(3.1) से लेकर (3.4) तक के समाकलों की वैधता के प्रतिबन्धों को मुख्य परिणाम (2.1) में उल्लिखित प्रतिबन्धों से आसानी से निकाला जा सकता है।

इस तरह हम उपर्युक्त विधियों से अनेक समाकलों को अपने समाकलों (2.2) तथा (2.3) से विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. सक्सेना, वी. पी. : Proc. Nat. Acad. Sc. India, 1982, 52A, 366-375.

2. चाई, डब्लू. ए. तथा कार्लिट्ज, एल. : SIAM, Rev. 1972, 14, 494, वही. 1973, 15, 670-672.

3. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, 1984.

4. श्रीवास्तव, एच. एल. : Indian J. Math. 1972, 14, 1-6.

5. श्रीवास्तव, एच. एल. तथा सिंह, एन. पी. : Rend. Circ. Mat. Palermo 1983, (2) 32, 157-187.

6. गुप्ता, आर. : पीएच. डी. थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, 1988.

7. राठी, एन. : विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1979, 22, 253-258.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 2, April 2002.

ली ग्रूप के अवकल आपरेटरों के माध्यम से मैट्रिक्स आर्गुमेण्ट के बेसेल बहुपद के जनक फल

पी. एल. सेठी
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण यूनिवर्सिटी, जोधपुर

तथा

एम. बी. अल-खाजेंदर
अलअज़हर यूनिवर्सिटी, गाज़ा, फिलिस्तीन

[प्राप्त — अगस्त 8, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य $p \times p$ कोटि के मैट्रिक्स सिद्धान्त तथा ली ग्रुपों के अवकल आपरेटरों के निरूपण के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना है।

Abstract

Generating functions of Bessel polynomial of matrix argument through differential operators of Lie group. *By* P. L. Sethi, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur and M. B. El-Khazendar, Alazhar University, Gaza, Palestine.

The aim of the present paper is to establish a fundamental relationship between matrix theory of order $p \times p$ and representation of differential operators of Lie groups to discuss certain generating functions of Bessel polynomial of matrix argument which is a based on the approach of Weisner. All the matrices are real positive symmetric definite.

1. प्रस्तावना

मैट्रिक्स अर्गुमेंट के बेसेल बहुपद के सबसे सुविधाजनक रूप को निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है।

$$J_n(S) = \frac{1}{\Gamma_p\left(n + \frac{p+1}{2}\right)} \, {}_0F_1\left(-;\, n + \frac{p+1}{2};\, S\right)$$

जहाँ $S = S' > 0, p \times p$ कोटि के वास्तविक धन संमितीय परिभाषित मैट्रिक्स है।

हाल ही में लेखकों ने[6] $p \times p$ मैट्रिक्स दशा में लागेर बहुपदों के लिए नवीन जनक फलन की स्थापना की है जिसमें वीसनर की ग्रुप थ्योरेटिक विधि[5] का प्रयोग हुआ है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य मैट्रिक्स आर्गुमेंट के बेसेल बहुपदों के जनक फलनों के नवीन परिणाम प्राप्त करना है। हमने नवीन जनक फलन की स्थापना निम्न रूप में की है–

$$(1 + T)^n \, J_n\left(\frac{X}{1+T}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \, J_{n-r}(X)\,(T)^{\prime} \tag{1}$$

तथा

$$(1 + T)^n \, J_n\left(\frac{X}{1-T}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \, J_{n-r}(X)\,(T)^{\prime} \tag{2}$$

जहाँ **X** तथा **T**, $p \times p$ वास्तविक धन संमित मैट्रिक्स हैं तथा **I** यूनिट मैट्रिक्स है, तथा जहाँ $X = X^{-1}$ क्योंकि $|X| \# 0$.

अब **X** को निम्न रूप में दिया जाता है–

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & x \ldots 0 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots x \end{bmatrix}$$

$p \times p$ कोटि के लिए मैट्रिक्स आर्गुमेण्ट की दशा में बेसेल बहुपद हैं–

$$J_n(X) = \frac{1}{\Gamma_p(n + 3/p)} \, {}_0F_1(-;\, n + 3/p;\, -X) \tag{3}$$

जहां

$$\Gamma_p(a) = \Pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(a)\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(a - \frac{p-1}{2}\right)$$

तथा

$${}_0F_1(-;\ n + 3/p;\ -X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{1}{(n + 3/p)_k} \frac{C_k(-X)}{k!} \tag{4}$$

$$\sum_{k} C_k(-X) = (tr(-X))^k \tag{5}$$

जहाँ

$$K = \left(k_1, k_2, \ldots, k_p\right), k_1, k_2 + \ldots + k_p = k,\ k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_p \geq 0$$

$\sum_r$ से संकलन का अनृण संख्या **K** के समस्त विभाजन का **p** भागों से अधिक को नहीं दर्शाता। **Ck (X)** जोनल बहुपद है[4] और

$$(a)_k = \prod_{j=1}^{p}\left(a - \frac{j-1}{2}\right) \tag{6}$$

2. रेखीय अवकल आपरेटर

निम्नांकित अवकल आवर्तन सम्बन्धों की तुष्टि के द्वारा हम बेसेल बहुपद $J_n(X)$ के लिए जनक फलन प्राप्त करेंगे जहाँ **n** ऋण संख्या है।

$$\frac{d}{dX} J_n(X) = X^{-1}\left(XJ_{n-1}(X) - nJ_n(X)\right) \tag{7}$$

$$\frac{d}{dX} J_n(X) = X^{-1}\left(nJ_n(X) - XJ_{n+1}(X)\right) \tag{8}$$

ये दो स्वतन्त्र अवकल आवर्तन सम्बन्ध रेखीय सामान्य समाकल समीकरणों को निर्धारित करते हैं जो रेनविले[3] द्वारा पहले ही निम्नांकित रूप में परिभाषित है–

$$X^2 \frac{d^2}{dX^2} J_n(X) + X\frac{d}{dX} J_n(X) + \left(X^2 - n^2\right)J_n(x) = 0 \tag{9}$$

हम जनकफल **G (X, Y)** की खोज में हैं जिससे जनक फलन की परिभाषा

$$G(X,\ Y) = \sum_{n} g_n J_n(X)\, Y^n \tag{10}$$

रूप में व्यक्त की जा सके जहाँ g_n स्वतन्त्र है **X** तथा **Y** से।

3. रेखीय अवकल आपरेटर

बेसिल बहुपदी मैट्रिक्स आर्गुमेंट के लिए हम प्रथम कोटिक रेखीय अवकलन आपरेटर **B** तथा **C** ज्ञात करेंगे जिससे कि

(i) $$B\left[J_n(X)\, Y^n\right] = J_{n-1}(X)\, Y^{n-1} \qquad n \geq 1 \tag{11}$$

(ii) $$sC\left[J_n(X)\, Y^n\right] = J_{n+1}(X)\, Y^{n+1} \qquad n \geq 1 \tag{12}$$

(i) की उपपत्ति

माना कि

$$B = B_1(X,\ Y)\,\frac{\partial}{\partial X} + B_2(X,\ Y)\,\frac{\partial}{\partial Y} + B_0(X,\ Y)$$

तथा

$$B = \left[J_n(X)\, Y^n\right]$$

$$= B_1\,\frac{\partial}{\partial X}\left[J_n(X)\, Y^n\right] + B_2\,\frac{\partial}{\partial Y}\left[J_n(X)\, Y^n\right] + B_0\left[J_n(X)\, Y^n\right] \tag{13}$$

जहाँ $\mathbf{B_i}$ **(i = 0, 1, 2)** फलन है **X** तथा **Y** का जो **n** से स्वतन्त्र है। अब (7) की सहायता से

$$B\left[J_n(X)\, Y^n\right] =$$

$$= B_1 X^{-1} Y^n \Big(X J_{n-1}(X) - n J_n(X)$$

$$+ B_2 J_n(X)\left(nY^{n-1}\right)\Big) + B_n J_n(X)\, Y^n \tag{14}$$

$J_{n-1}(X)\,Y^{n-1}$ के गुणांक को X तथा Y से स्वतन्त्र बनाने के लिए तथा $J_n(X)\,Y^n$ के गुणांक को शून्य बनाने हेतु हम $B_1 = Y^{-1}$, $B_2 = X^{-1}$ तथा $B_0 = 0$ चुनते हैं

तो (14) का रूप

$$B\left[J_n(X)\,Y^n\right] = J_{n-1}(X)\,Y^{n-1}$$

हो जाता है जो (11) है

और

$$B = Y^{-1}\frac{\partial}{\partial X} - X^{-1}\frac{\partial}{\partial Y} \tag{15}$$

2. की उपपत्ति

इसी तरह आर्वतन सम्बन्ध (8) का प्रयोग करने पर

$$C\left[J_n(X)\,Y^n\right] = J_{n+1}(X)\,Y_{n+1}$$

हमें प्राप्त होता है जो (12) है तथा

तथा

$$C = Y\frac{\partial}{\partial X} - X^{-1}Y^2\frac{\partial}{\partial y} \tag{16}$$

4. आपरेटरों का समूह

प्रथम रेखीय अवकल आपरेटर

$$\left.\begin{aligned} A &= Y\frac{\partial}{\partial Y} \\ B &= Y^{-1}\frac{\partial}{\partial X} + X^{-1}\frac{\partial}{Y} \\ C &= Y\frac{\partial}{\partial X} - X^{-1}Y^2\frac{\partial}{\partial Y} \\ E &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

तुष्ट करते हैं

$$\left.\begin{aligned} &(i) \quad [A, B] = -B \\ &(ii) \quad [A, C] = -C \\ &(iii) \quad [C, B] = -2X^{-2}A \\ &(iv) \quad [E, A] = [E, B] = [E, C] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(i) की उपपत्ति

माना कि U फलन है X तथा Y का तो

$$[A + B]\,U = (AB - BA)\,U \tag{19}$$

अब

$$(AB - BA)\,U = \left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y^{-1}\frac{\partial U}{\partial X} + X^{-1}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) - \left(Y^{-1}\frac{\partial}{\partial X} + X^{-1}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y\frac{\partial U}{\partial Y}\right) \tag{20}$$

यहाँ पर

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & x & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & x \ldots 0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots x \end{bmatrix}_{p\times p} \quad ; |X| = \left(x^p \neq 0\right)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & y & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & y \ldots 0 \\ \cdot & & \quad\cdot \\ \cdot & & \quad\cdot \\ \cdot\cdot & & \\ \cdot & & \quad\cdot \\ \cdot & & \quad\cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots y \end{bmatrix}^{p\times p} \quad ; |Y| = y^p \neq 0$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} y & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial y} y \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{p \times p} = I$$

और चूँकि

$$Y^{-1} = \frac{adj\,|Y|}{\partial Y}$$

$$= \frac{1}{y^p} \begin{bmatrix} y^{p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^{p-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y^{p-1} & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y^{p-1} \end{bmatrix}_{p \times p}$$

$$= \begin{bmatrix} y^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y^{-1} & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y^{-1} \end{bmatrix}_{p \times p}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y^{-1}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}y^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}y^{-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y}y^{-1} & \dots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial y}y^{-1}\end{bmatrix}_{p\times p}$$

$$=\begin{bmatrix}-y^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -y^{-2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -y^{-2} & \dots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y^{-2}\end{bmatrix}_{p\times p}$$

$$=\frac{-1}{y^2}=-y^{-2}I \tag{21}$$

इसी तरह

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(X^{-1}\right)=\begin{bmatrix}-x^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -x^{-2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -x^{-2} & \dots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x^{-2}\end{bmatrix}_{p\times p}$$

$$=\frac{-1}{x^2}=-x^{-2}I \quad (22$$

अतः $(AB-BA)U=\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y^{-1}\frac{\partial U}{\partial X}+X^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\left(Y^{-1}\frac{\partial}{\partial X}+X^{-1}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y\frac{\partial U}{\partial Y}\right)$

$$= Y\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y^{-1}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + Y\frac{\partial}{\partial Y}\left(X^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - Y^{-1}\frac{\partial}{\partial X}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right) - X^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{-1}{Y}\frac{\partial U}{\partial X} - X^{-1}\, I\frac{\partial u}{\partial y}$$

जहाँ $\qquad \frac{\partial}{\partial Y\,\partial X} = \frac{\partial}{\partial X\,\partial Y}$

$$= -\,Y^{-1}\frac{\partial U}{\partial X} - X^{-1}\frac{\partial U}{\partial Y} = -\,BU$$

इसलिए $\qquad [A,\ B] = -\,B$

इसी तरह हम अन्य सम्बन्धों को सिद्ध कर सकते हैं। इसलिए ये कम्यूटेटर सम्बन्ध दिखलाते हैं कि आपरेटर **A, B, C, E** ली ग्रूप उत्पन्न करते हैं।

अब हम आपरेटर **B** तथा **C** से प्रत्येक द्वारा जनित ग्रुप के विस्तृत रूपों को व्यक्त करेंगे जो इस प्रकार हैं

$$\exp(bB)f(X,\ Y) = f\left[\frac{XY}{Y + bI},\ Y + bI\right] \tag{23}$$

$$\exp(c\,C)f(X,\ Y) = f\left[\frac{XY}{Y + bI},\ Y - bI\right] \tag{24}$$

जहाँ **f (X, Y) X** तथा **Y** का फलन है और **b** तथा **c** कोई स्केलर गुणांक है।

5. जनक फलन

चूँकि $\mathbf{J_n(X)\,Y^n}$ समीकरणk (9) बेसल अवकल का हल है अतः हम दो दशाओं पर विचार करते हुए जनक फलन ज्ञात करते हैं।

दशा 1 : $b = 1,\ c = 0$

दशा 2 : $b = 0,\ c = 1$

दशा 1 : (23) में $b = 1,\ c = 0$ रखने पर $f(X,\ Y) = J_n(X)\,Y^n$

हमें ज्ञात है कि

$$\exp(B)\left[J_n(X)Y^n\right] = (Y+I)^n J_n\left(\frac{XY}{Y+I}\right) \tag{25}$$

माना कि

$$G(X, Y) = Y^n\left(I+Y^{-1}\right)^n J_n\left(\frac{XY}{Y+I}\right)$$

G (X, Y) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$G(X, Y) = Y^n\left(I+Y^{-1}\right)^n J_n\left(\frac{X}{1+y^{-1}}\right) \tag{26}$$

(25) में **(11)** का सम्प्रयोग करने पर

$$\exp(B)\left[J_n(X)Y^n\right] = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{I}{r!}J_{n-r}(X)\,Y^{n-r} \tag{27}$$

इसलिए **(26)** तथा **(27)** में Y^{-1} के स्थान पर **T** रखने पर हमें

$$\left(I+Y^{-1}\right)^n J_n\left(\frac{X}{1+y^{-1}}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{I}{r!}J_{n-r}(X)\,Y^{-r}$$

प्राप्त होता है और तब हमें जनक सम्बन्ध **(1)** प्राप्त होता है।

दशा 2 : दशा **1** की विधि का प्रयोग करने पर। $b = 0$, $c = 1$ रखने पर हमें **(24)** तथा **(12)** से **(2)** में दिया हुआ जनक फलन प्राप्त होता है।

निर्देश

1. मथाई, ए. एम. : Jacobians of matrix trasformation and functions of matrix argument, World Scientific Publishing न्यूयार्क (1997).

2. ब्राइड, ई. बी. सी. : Obtaining generating functions (Springer Tracts in National Philosophy) Springer Verlag, न्यूयार्क, बर्लिन (1971).

3. रेनविले, ई. डी. : Special function, McMillan & Co. न्यूयार्क (1960).

4. सुब्रमन्यम, के. : Sankhya, 1976, 38, 4, 221-258.

5. वीसनर, एल. : Pacific J. Math, 1955, **5**, 1033-1039.

6. सेठी, पी. एल. तथा अल-खाजेन्दर, एम. बी. (प्रेषित).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 2, April 2002.

राजस्थान में भालू (*मैल्यूर्सस अर्सिनस*) का वितरण

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी (वन्य जीव), फुलवारी वन्य जीव अभयारण्य,
कोटडा, जिला उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—जनवरी 7, 2002]

सारांश

प्रस्तुत पत्र में राजस्थान में भालू के वितरण संबंधी जानकारी दी गई है। वर्तमान में यह वन्य प्राणी राजस्थान के दक्षिणी एवं दक्षिण-पूर्वी भू-भाग में फैला हुआ है। राज्य के पश्चिमी, उत्तरी एवं उत्तर-पूर्वी भाग में वर्तमान में यह प्रजाति उपस्थित नहीं है।

Abstract

Distribution of Sloth Bear (*Melursus ursinus*) in Rajasthan. By Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer (Wildlife), Phulwari Wildlife Sanctuary, Kotra, District Udaipur (Raj.).

In the present paper, an account has been given about the present distribution of the Sloth Bear (Melursus ursinus) in Rajasthan. This wild animal is confined to the southern and south-eastern parts of Rajasthan State. At present it is not distributed in western, northern and north-eastern parts of the State.

भारत में भालुओं की चार जातियां मिलती हैं जिनके नाम स्लॉथ बीयर (Mehursus ursinus), भूरा भालू (Ursus arctos), हिमालयन काला भालू (Selenarctos thibetanus) एवं मलायन सूर्य भालू (Helarctos malayanus) हैं।[6] इनमें से भालू की राजस्थान में एक ही जाति मिलती है जो तकनीकी रूप से मैल्यूर्सस अर्सिनस है। वन्यप्राणी (सुरक्षा) अधिनियम 1972 की अनुसूची II के भाग II का सदस्य होने से यह एक संरक्षित प्राणी है। निश्चय रूप से यह सघन वनों में रहने वाली प्रजाति है जो राजस्थान में राज्य के सघन वन क्षेत्रों तक सीमित है। वनों में व वनों की परिधि पर रहने वाले लोगों का भालू से खूब परिचय है। बाघ एवं तेन्दुओं की अपेक्षा राजस्थान के लोग

सारणी 1

राजस्थान में भालू की उपस्थिति जानने हेतु सर्वे का विवरण

नाम क्षेत्र	जिला	उपस्थिति	मुख्य इको—क्षेत्र
फुलवारी अभयारण्य	उदयपुर	+	1
सज्जनगढ़ अभयारण्य	उदयपुर	–	1
सोम (पार्ट द्वितीय) वन खण्ड (प्रादेशिक रेन्ज, झाडोल)	उदयपुर	+	1
सामोली, तिनसारा, लादन, मेरपुर वन खण्ड (प्रादेशिक रेन्ज, कोटड़ा)	उदयपुर	+	1
नाल सान्डोल, झमेरी, गुजरी की नाल वन क्षेत्र (प्रादेशिक रेन्ज, झाड़ोल)	उदयपुर	–	1
रामकुण्डा वन खण्ड (प्रादेशिक रेन्ज,ओगणा)	उदयपुर	+	1
खोखरिया की नाल (प्रादेशिक रेन्ज, देवला)	उदयपुर	+	1
नाल मोखी वन खण्ड (सामाजिक वानिकी रेन्ज, गोगुन्दा)	उदयपुर	–	1
माउन्ट आबू वन्य जीव अभयारण्य	सिरोही	+	1
कुंभलगढ़ वन्यजीव अभयारण्य	राजसमन्द	+	1
रावली टाटगढ़ वन्य जीव अभयारण्य	अजमेर	+	1
नाहरगढ़ वन्य जीव अभयारण्य	जयपुर	–	1
जमवारामगढ़ अभयारण्य	जयपुर	–	1
बाघ परियोजना, सरिस्का	अलवर	–	1
बाघ परियोजना, रणथम्भौर	सवाई माधोपुर	+	2
केवलादेव राष्ट्रीय उद्यान	भरतपुर	–	3
दर्रा अभयारण्य	कोटा	+	2
जवाहर सागर वन्य जीव अभयारण्य	बूंदी	+	2
रामगढ़ विषधारी वन्य जीव अभयारण्य	बूंदी	+	2
कैलादेवी वन्य जीव अभयारण्य	करौली	+	2
मरू राष्ट्रीय उद्यान	जैसलमेर	–	4
भैंसरोड़गढ़ वन्य जीव अभयारण्य	चित्तौड़गढ़	+	2
सवाई मानसिंह वन्य जीव अभयारण्य	सवाई माधोपुर	+	2

+ = उपस्थित, – = अनुपस्थित, 1 = अरावली पर्वतमाला, 2 = विंध्याचल पर्वतमाला, 3 = यमुना का पुराना मैदान, 4 = थार रेगिस्तान

भालू को ज्यादा जानते-पहचानते हैं क्योंकि अक्सर भालू के आक्रमण के प्रकरण हर साल होते रहते हैं जबकि बाघ-तेन्दुओं के आक्रमण के प्रकरण नहीं के बराबर होते हैं। महुआ बीनने के मौसम में भालूओं के हमलों की कई बार सूचनायें मिलती रहती हैं।

भालू राजस्थान के वनों की एक महत्त्वपूर्ण वन्य प्रजाति है। अतः इस पर राजस्थान के परिप्रेक्ष्य में प्रकाश डालना जरूरी है। राजस्थान में भालू की उपस्थिति/अनुपस्थिति सम्बन्धी सूचनायें अभयारण्य एवं राष्ट्रीय उद्यानों के परिप्रेक्ष्य में तो अपेक्षाकृत अच्छी तरह उपलब्ध हैं परन्तु संरक्षित क्षेत्रों के बाहर वितरण पर अपूर्ण जानकारी ही उपलब्ध है। प्रस्तुत पत्र में संरक्षित क्षेत्रों के बाहर के क्षेत्रों से सम्बन्धित जानकारी भी दी गई है। साथ ही सौ वर्ष पूर्व एवं वर्तमान में वितरण रेंज का निर्धारण भी किया गया है।

प्रयोगात्मक

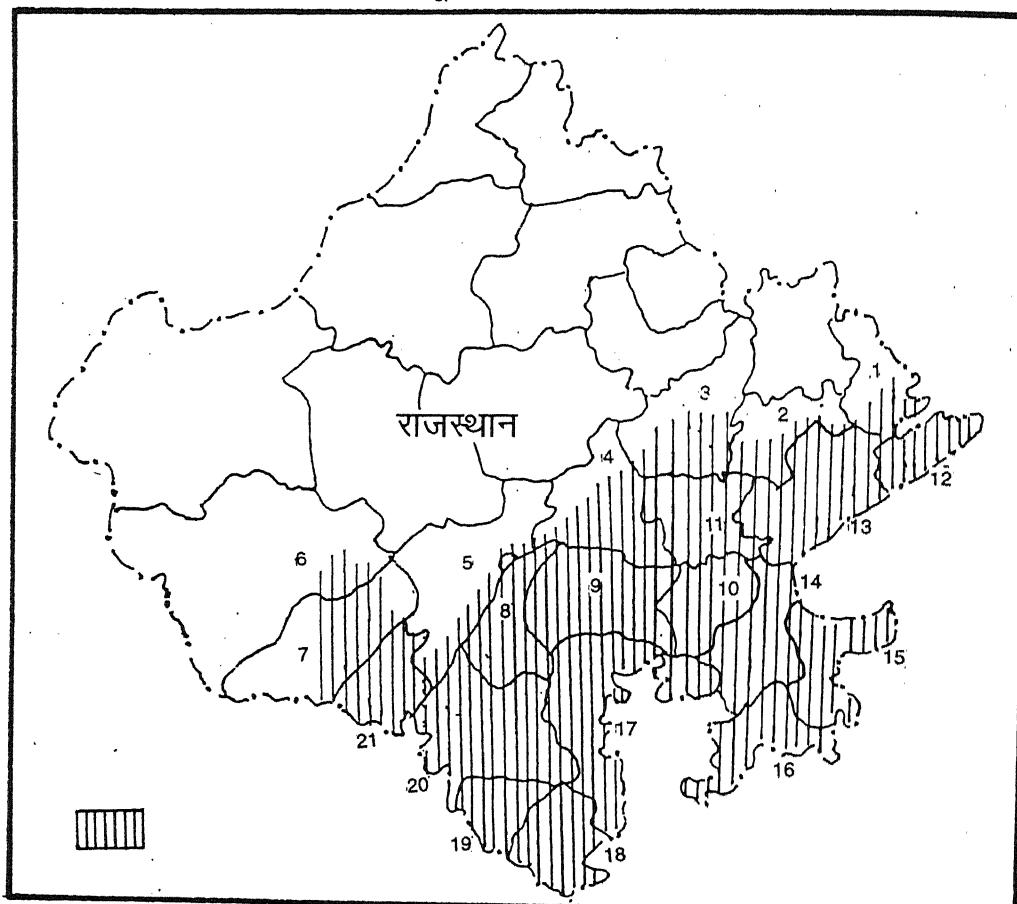
वर्ष 1980 से 2001 तक राजस्थान के वनों में राज्य सेवा के दौरान हुये अनुभव, प्रेक्षणों एवं वन्य प्राणी गणना सूचनाओं से इस प्राणी के बारे में जानकारियाँ जुटाई गई हैं। वनों में रहने वाले वनवासी इस प्राणी के बारे में सूचना के अच्छे स्त्रोत साबित हुये हैं। जिन लोगों पर भालुओं के आक्रमण हुए उनसे भी सूचना संग्रहीत की गई। पुराने प्रकाशित वैज्ञानिक साहित्य एवं गजेटियरों का भी अध्ययन किया गया। अप्रत्यक्ष प्रमाण जैसे वृक्षों पर खरोंच के निशान, भूमि पर खोदने के निशान, विष्ठा, पगमार्क, दीमकघरों की टूटफूट आदि को भी भालू की उपस्थिति निर्धारण करने में एक पैरामीटर की तरह प्रयुक्त किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

वनों में रहने के दौरान किये सर्वे एवं वन्य प्राणी गणना रिपोर्टों के आधार पर भालू की राजस्थान के जिन क्षेत्रों में उपस्थिति सिद्ध हुई हैं वे सारणी 1 में अंकित हैं।

इस सारणी से स्पष्ट है कि वर्तमान में भालू दक्षिण अरावली एवं विंध्याचल पर्वतमाला के धौक वनों में (दक्षिण-पूर्वी राजस्थान) फैला हुआ है (चित्र 1)। अरावली पर्वतमाला का पश्चिमी ढाल, पश्चिम दिशा में इसकी अंतिम वितरण सीमा है। यह जाति राज्य के रेगिस्तानी क्षेत्र में पूर्णतया अनुपस्थित है। रेगिस्तानी जिलों में केवल जालौर जिले में सुंडामाता वन क्षेत्र (जसवन्तपुरा रेंज) में ही वर्तमान में रीछ उपस्थित है (श्री भरत तैमनी, उप वन संरक्षक, निज पत्राचार)। सुंडामाला एक सघन वन क्षेत्र है जो सिरोही जिले की सीमा से सटा हुआ है। सुंडामाता के बाद पश्चिम में चलने पर वर्तमान में रीछ कहीं उपलब्ध नहीं हैं। अरावली के पश्चिम ढाल पर रणकपुर-सादडी तक रीछ उपस्थित है। राजसमन्द जिले की नाथद्वारा तहसील के हल्दीघाटी क्षेत्र में भी रीछ उपलब्ध है (श्री कृष्ण श्रीमाली, निजी पत्राचार)।

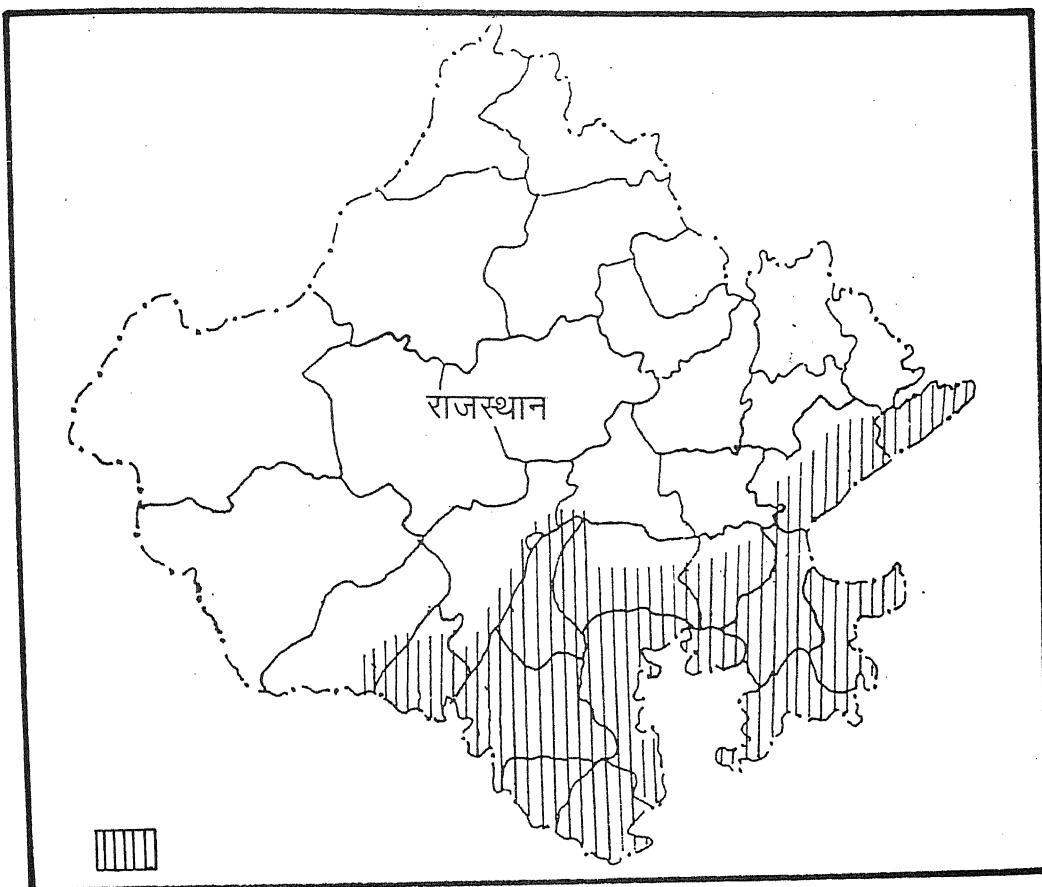
एडम[1] के अनुसार भालू सिरोही, जसवन्तपुरा, जालौर एवं सिवाना तक फैला हुआ था। सिवाना बाडमेर जिले का एक क्षेत्र है लेकिन एडम के बाद विगत 100 वर्षों के उपरान्त वर्तमान

भालू का वितरण क्षेत्र

(जिले 1 = भरतपुर, 2 = दौसा, 3 = जयपुर, 4 = अजमेर, 5 = पाली, 6 = बाड़मेर 7 = जालौर 8 = राजसमन्द, 9 = भीलवाड़ा, 10 बूंदी, 11 = टोंक, 12 = धौलपुर, 13 = सवाई माधोपुर एवं करौली, 14 = कोटा, 15 = बारा, 16 = झालावाड़, 17 = चित्तौड़गढ़, 18 = बांसवाड़ा, 19 = डूंगरपुर, 20 = उदयपुर, 21 = सिरोही)

चित्र 1 : सन् 1900 में राजस्थान में भालू का वितरण क्षेत्र

में स्थिति बदल चुकी है। अब सिवाना एवं जालौर में भालू नहीं है। केवल जसवन्तपुरा क्षेत्र एवं सिरोही में ही, खासकर माउन्ट आबू क्षेत्र में भालू बचा है (चित्र 2)।

किसी समय पूरे दक्षिण अरावली संभाग में रीछों का बाहुल्य था लेकिन अब डूंगरपुर एवं बाँसवाड़ा जिलों में यह प्रजाति लगभग समाप्त हो चुकी है। कुछ वर्ष पूर्व डूंगरपुर जिले की बीछीवाड़ा रेंज के सागवान वनों में एक रीछ के होने की जानकारी मिली थी (श्री फूलसिंह, क्षेत्रीय वन

भालू का वितरण क्षेत्र

चित्र 2 : सन् 2000 में राजस्थान में भालू का वितरण क्षेत्र

अधिकारी, निजी पत्राचार)। बिछीवाडा रेंज, उदयपुर जिले की खैरवाडा रेंज से सटी हुई है। चूंकि उदयपुर जिले में फुलवारी अभयारण्य एवं इसके 50 किलोमीटर दूर गुजरात राज्य में बनासकाँठा जिले का ''बालाराम अम्बाजी भालू अभयारण्य'' भालू बाहुल्य क्षेत्र हैं अतः इन क्षेत्रों से भालू गरणवास क्षेत्र के वनों से होकर खैरवाड़ा वन क्षेत्र में होकर बिछीवाड़ा पहुँच सकते हैं। साथ ही राजस्थान राज्य की झाड़ोल तहसील की दक्षिण दिशा में सटे गुजरात के वणज क्षेत्र (रेंज विजयनगर) के सागवान वनों में भी भालू हैं। इस क्षेत्र के भालू भी राजस्थान के गरणवास या गुजरात के श्यामलाजी वन क्षेत्रों से होकर डूंगरपुर जिले के वन क्षेत्रों तक जा सकते हैं। परन्तु धीरे-धीरे वनों की निरन्तरता कम होने से एवं मानवीय व्यवधान बढ़ने से ''वन गमन पथों'' (forest corridors) की उपलब्धता न केवल बाधित हो रही है अपितु समाप्त भी हो रही है, जिससे पश्चिम दिशा से

भालू डूंगरपुर तक नहीं पहुँच पा रहे हैं। हालांकि इक्का—दुक्का भालू डूँगरपुर जिले में रेकार्ड होते रहते हैं जो उनके सीमित आवागमन/उपस्थिति का संकेत है। बाँसवाड़ा जिले में भी वर्तमान में भालू की उपस्थिति दर्ज नहीं हो रही है। इन दोनों जिलों में पूर्व दिशा से भी भालू आवागमन संभव है परन्तु अब खंडित वन निरन्तरता से संभवतः आवागमन बाधित हुआ है।

इस समय सर्वाधिक भालू माउण्ट आबू, कुंभलगढ़, फुलवारी, रणथम्भोर एवं कैवादेवी संरक्षित क्षेत्रों में हैं।

राजस्थान के कई गांव रीछों की उपस्थिति के कारण ही अपना नाम पा सके हैं। राजसमन्द जिले की कुम्भलगढ़ तहसील में रींछेड़, उदयपुर जिले की गोगुन्दा तहसील का रींछवाडा एवं झाडोल तहसील का रिछादर लोकमत के अनुसार वहाँ कभी रींछों के बाहुल्य के कारण ही अपना रींछ आधारित नाम पा सके हैं[10]। झालावाड़ जिले में रींछवा गांव, जो झालावाड़-भोपाल मार्ग पर स्थित है, रीछों की उपस्थिति के कारण ही सम्भवतः अपना यह नाम अर्जित कर सका है। चित्तौड़गढ़ जिले में भी रींछी गांव के आसपास रीछों की उपस्थिति दर्ज है। इस गांव का नामकरण भी इसी तरफ संकेत करता है।

जिला गजेटियरों के अध्ययन से पता चलता है कभी भालू राजस्थान में उत्तर एवं पूर्व दिशा में काफी दूर तक फैला था। सहगल[6] द्वारा लिखे भरतपुर के गजेटियर से पता चलता है कि भरतपुर क्षेत्र में भी कभी भालू था। भरतपुर जिले के वन विहार में भालू की उपस्थिति बताई गई है जो जिला विभाजन के बाद इस समय धौलपुर जिले में है। नारायण[5] ने अपने शोध प्रबंध में ''गजेटियर ऑफ ईस्टर्न राजपूताना स्टेट'' के लेखक मेजर एच. ई. ब्रुकमैन की टिप्पणी को उद्घाटित करते हुये बताया है कि ब्रुकमैन के अनुसार केवलादेव घना तक में भालू विद्यमान थे। उनका कहना है कि घना से दक्षिण-पश्चिम में 25 किमी. दूर ''झील का वाडा'' में भालुओं का बाहुल्य था। उनका मत है कि संभवतः बाद में जल प्लावन से दलदली/नम आवास पनप जाने से भालू हेतु यह क्षेत्र अनुपयुक्त हो गया। यह गजेटियर वर्ष 1902 में लिखा गया था यानी लगभग 100 वर्ष पूर्व केवलादेव घना में भालू जाति विद्यमान थी।

गुप्ता[4] द्वारा जबलपुर जिले के गजेटियर में लिखा गया है कि भालू जयपुर जिले में पूर्व में उपस्थित था। अग्रवाल[2] द्वारा सीकर जिले के गजेटियर में भालू होने की कोई सूचना दर्ज नहीं है। राम[7] द्वारा लिखे अलवर के गजेटियर में भी भालू संबंधी कोई सूचना उपलब्ध नहीं है। भले ही कभी जयपुर जिले में भालू रहा हो लेकिन आज जयपुर, दौसा, अलवर, भरतपुर जिले में भालू बिल्कुल नहीं है। परन्तु रियासत काल में जब मानवीय आबादी कम थी, जयपुर के नाहरगढ़, जमवारामगढ़ तथा अलवर के सरिस्का क्षेत्र के वनों में निरन्तरता थी। इन तीनों ही जगहों पर वनों की प्रकृति व आवासीय विशिष्टताएं भी काफी समान हैं। तीनों ही धौक वन (*Anogeissus pendula*) हैं। अतः यदि जयपुर में भालू थे तो वे आसानी से सरिस्का पहुँच सकते थे अतः उनकी निरन्तरता जयपुर से आगे भी रही होगी।

अजमेर जिले के उत्तरी भाग में भी वर्तमान में भालू कहीं नहीं हैं। इस जिले के दक्षिण भाग में रावली टाटगढ़ अभयारण्य में अभी भी भालू विद्यमान हैं। यह क्षेत्र कुम्भलगढ़ अभयारण्य के काफी पास है तथा प्राचीन समय में कुम्भलगढ़ एवं रावली टाटगढ़ के वनों में भी निरन्तरता थी तथा दोनों क्षेत्रों में भालू आते जाते थे। परन्तु समय के साथ दोनों अभयारण्यों के बीच के वनों की भौतिक निरन्तरता समाप्त होती जा रही है।

पूर्व में उदयपुर संभाग में भालू काफी फैला हुआ था लेकिन अब यह प्रजाति झाड़ोल व कोटड़ा दो तहसीलों में सीमित हो गई है। कभी-कभी गोगुन्दा एवं खैरवाड़ा तहसीलों के वे क्षेत्र जो झाडोल एवं कोटडा से जुड़े हुए हैं वहाँ भालू के मिलने की सूचनाएं मिलती हैं। इस समय उदयपुर जिले में सबसे ज्यादा भालू झाड़ोल एवं कोटडा तहसील में ही हैं। स्मरण रहे इन दोनों तहसीलों में ही फुलवारी अभयारण्य स्थित है जो भालू की अच्छी शरणस्थली है। इन दोनों तहसीलों में अभयारण्य के बाहर अन्य क्षेत्रों जैसे— सोम (द्वितीय), सामोली, तिनसारा, लादन, मेरपुर, रामकुण्डा, खोखरिया की नाल आदि वन खण्डों में भी भालू देखे जा सकते हैं।

दक्षिण राजस्थान में फुलवारी अभयारण्य के डैया-अम्बासा क्षेत्र में गूलर (Ficus glomerata) के वृक्षों पर भालूओं के चढ़ने से बने नाखूनों की खरोंचों के निशान भालुओं की उपस्थिति एवं गतिविधियों को दर्शाने वाले अच्छे प्रमाण हैं। ये खरोंचों के निशान गूलर के वृक्षों पर जगह-जगह देखे जा सकते हैं। फुलवारी अभयारण्य में बिरोठी नाके के वन क्षेत्र में मई, 2001 को एक विशाल अर्जुन (*Terminalia arjuna*) वृक्ष पर मधुमक्खी का शहद खाने के लिये चढ़ते भालू को बार-बार इसलिये फिसलना पड़ा क्योंकि वृक्ष की मोटाई अत्यधिक थी। उसके बार-बार फिसलने से सारे तने पर खरोंचों के निशान भर गये (चित्र 3)। लेकिन अंततः भालू चढ़ने में सफल रहा एवं उसने बड़ी मधुमक्खी (Apis dorsata) का शहद खा लिया।

उदयपुर संभाग में जयसमंद अभयारण्य में भी भालू थे[3], लेकिन अब इस अभयारण्य में भालू नहीं हैं। जयसमंद क्षेत्र में सटे सलुम्बर क्षेत्र में भी वर्तमान में भालू ज्ञात नहीं है। जयसमन्द एवं सज्जनगढ़, उदयपुर ये दो ऐसे अभयारण्य हैं जिनमें शुष्क नाले हैं जिनमें केवल वर्षा में तेज वर्षा होने पर ही बहाव की स्थिति रहती है। इन शुष्क नालों में गूलर वृक्ष बहुत ही कम हैं जबकि गूलर भालू का प्रिय भोजन है। फुलवारी अभयारण्य में भी भालू का गूलर ही प्रिय भोजन है, जहाँ नम, बारहमासी या अर्द्ध बारहमासी नालों में गूलर वृक्ष काफी हैं जो भालू को पर्याप्त भोजन प्रदान करते हैं।

आबू पर्वत पर गूलर के अलावा लैण्टाना *(Lantana camara)* के फल भी भालू का प्रिय भोजन हैं। इस अभयारण्य में लैन्टाना बहुत अधिक फैल चुका है। भालू लैन्टाना के फलों को खाता है तथा अपने मल द्वारा बीजों को दूर-दूर तक फैलाता है। आबू पर्वत में भालू बेर के फलों पर भी बहुत निर्भर करता है। तलहटी क्षेत्र में बेरों के बागों में फल खाने हेतु भालू ऊपर से उतर कर नीचे पहुँच जाते हैं तथा फल खाते हैं। इस तरह बेर के मौसम में आबू पर्वत अभयारण्य में भालुओं में गमन कर (Vertical migration) नीचे चले आने की प्रवृत्ति है।

चित्र 3 : अर्जुन के वृक्ष पर रीछ के चढ़ने के निशान।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक वन विभाग, राजस्थान के सभी अधिकारयों-कर्मचारियों का आभारी है जिनके सहयोग से भालू संबंधी अध्ययन संभव हुआ।

सन्दर्भ

1. एडम, ए. : द वेस्टर्न राजपूताना स्टेट, 1900, पृष्ठ 1-455.
2. अग्रवाल, बी. डी. : गजेटियर ऑफ इंडिया, राजस्थान, सीकर, 1978, पृष्ठ 1-479.
3. अग्रवाल, बी. डी. : गजेटियार ऑफ इंडिया, राजस्थान, उदयपुर, 1979, पृष्ठ 1-654.
4. गुप्ता, एस. : गजेटियर ऑफ इण्डिया, राजस्थान, जयपुर, 1987, पृष्ठ 1-970.
5. नारायण, एस. : पीएच. डी. थिसिस, 1993, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर.
6. प्रेटर, एस. एच. : द बुक ऑफ इण्डियन मैमल्स, 1980, पृष्ठ 1-324.
7. राम, एम. : गजेटियर ऑफ इण्डिया, राजस्थान, अलवर, 1968, पृष्ठ 1-721.
8. सहगल, के. के. : गजेटियर ऑफ इण्डिया, राजस्थान, भरतपुर, 1971, पृष्ठ 1-492.
9. सहगल, के. के. : गजेटियर ऑफ इण्डिया, राजस्थान, चित्तौड़गढ़, 1977, पृष्ठ 1-457.
10. शर्मा, एस. के. : लोक प्राणि विज्ञान, 1998, पृष्ठ 1-146.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 2, April 2002.

संकर गायों के अयनों के पूर्व उपचार द्वारा कच्चे दूध की जीवाण्वीय गुणवत्ता पर प्रभाव

जगदीश प्रसाद तथा उमेश कुमार शुक्ल
पशुपालन एवं पशु चिकित्सा विज्ञान विभाग,
इलाहाबाद एग्रीकल्चरल इन्स्टीट्यूट (डीम्ड विश्वविद्यालय) इलाहाबाद

[प्राप्त – सितम्बर 4, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में संकर गायों के अयन को दुहाई के पूर्व उपचारित करके ताजे कच्चे दूध में जीवाणुओं के गुणों एवं घनत्व में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Bacteriological quality of raw cowmilk as influenced by premilking treatments of udder wash. *By* Jagdish Prasad and Umesh Kumar Shukla, Department of Animal Husbandry and Veterinary Science, Allahabad Agrilculture Institute (Deemed University), Allahabad.

In the present study, an attempt has been made to determine bacterial density and quality in fresh raw milk as influenced by pre-milking treatment of udder of cross breed cows.

स्वच्छ दूध उत्पादन में मुख्यतया गाय के स्वास्थ्य एवं स्वच्छता दो कारक होते हैं। जीवाणु प्रायः अयन नलिका के बाहर की ओर से शुद्ध दूध को संक्रमित करते हैं, तत्पश्चात् अयन कुंडिका में उनकी वृद्धि शुरू हो जाती है जीवाणुओं का घनत्व पहली दुहाई के समय ज्यादा तथा अन्तिम दुहाई के समय कम होता है। इसलिए दूध में जीवाणुओं की संख्या एवं प्रकार के अनुसार दूध की गुणवत्ता प्रभावित होती है। यह अध्ययन संकर गायों के अयन को दुहाई के पूर्व उपचारित करके ताजे कच्चे दूध में जीवाणुओं के गुणों एवं घनत्व को ज्ञात करने के उद्देश्य से किया।

प्रयोगात्मक

इलाहाबाद कृषि संस्थान के डेयरी फार्म की 20 संकर गायों को जिनमें ऋणात्मक कैलीफोर्नियन मैस्टिटाइटिस टेस्ट (CMT) प्राप्त हुआ, इस अध्ययन के लिए चुनी गईं। इनमें से 4-4 गायों के पांच समूह बनाकर उनके अयनों को पाँच प्रकार के उपचार दिये गये—

T_1 (नियन्त्रण) अयन को स्वच्छ जल से धोकर तौलिये से सुखाया गया

T_2 अयन को 8% नमकीन जल से धोया गया

T_3 अयन को (1:1000) $KMnO_4$ विलयन से धोया गया

T_4 अयन को 3% डेटाल से धोया गया

T_5 अयन को नीम की पत्तियों को जल में उबाल कर (200 ग्राम पत्तियों को 1000 मिली. जल में उबाल कर छान लिया गया और ठंडा करके) तैयार किये गये निष्कर्ष से धोया गया।

सबसे पहले गायों के अयन को मल कर दूध की दो धारें निकाल दी गईं और हर गाय से 100 मिली. दूध का नमूना निर्जर्मित 250 मिली. फ्लास्कों में एकत्र किया गया। इन नमूनों में स्टैंडर्ड प्लेट काउंट (SPC), लैक्टिक अम्ल जीवाणु संख्या, वसा अपघटक जीवाणु संख्या, प्रोटीन अपघटक जीवाणु संख्या तथा कोलीफार्म संख्या की गणना मानक विधियों से की गई।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न प्राचलों के प्राँप्त मान सारणी 1 में दिये हुए हैं।

SPC (10^3)

यह मान 6.2 से 8.83 के मध्य पाया गया, चाहे उपचार जैसा भी हो। फिर भी सर्वाधिक मान T_1 (नियन्त्रण) में पाया गया, फिर क्रमशः T_2, T_3, T_4 तथा T_5 में। इससे स्पष्ट हो जाता है कि अयन की जीवाणुरोधी धुलाई से मान में कमी आई। सर्वाधिक कमी T_5 में पाई गई। इसका अर्थ यह हुआ कि ताजे दूध में जीवाणुओं की संख्या घटाने में नीम का निष्कर्ष सर्वाधिक प्रभावी रहा।

लैक्टिक अम्ल जीवाणु

ज्ञात परिणाम बतलाते हैं कि सभी उपचारों से नियन्त्रण के तुल्य ही संख्या पाई गई, अतः इन जीवाणुओं में उपचारों से कोई प्रभाव नहीं पड़ा।

प्रोटीन अपघटक जीवाणु

इनकी संख्या प्रति मिली. 0.3×10^2 से 44.5×10^2 के बीच पाई गई। यद्यपि मानों में अन्तर

दिखता है किन्तु यह अन्तर सार्थक नहीं है अतः सभी उपचारों का कोई प्रभाव नहीं दिखा।

सारणी 1

दुहाई के पूर्व उपचार द्वारा जीवाणुओं को प्रभावित करने के लिए विभिन्न प्राचलों के मध्यमान

प्राचल	उपचार					
	T_1	T_2	T_3	T4	T_5	CD
SPC ($\times 10^3$/ml)	242.1	116.0	103.6	92.0	59.7	126.3
लैक्टिक अम्ल जीवाणु ($\times 10^3$/ml)	2.8	5.8	0.93	0.99	0.8	–
प्रोटीन अपघटक जीवाणु ($\times 10^2$/ml)	87.8	12.0	12.7	14.0	11.6	–
वसा अपघटक जीवाणु ($\times 10^2$/ml)	17.0	16.8	9.7	8.4	11.7	–
कोलीफार्म ($\times 10^1$/ml)	6.0	0.3	0.1	0.07	0.2	0.46
SPC में प्रतिशत कमी	–	52.0	57.4	61.5	75.3	–

वसा अपघटक जीवाणु

इनकी संख्या 1.6 से 44.9 ($\times 10^2$)/मिली. पाई गई। इनके माध्यमान 17 से 8.4 के बीच रहे किन्तु ये मान सार्थक नहीं हैं अतः उपचारों का कोई प्रभाव नहीं पड़ा।

कोलीफार्म संख्या

इनकी संख्या 0 से 2.7 (× 10/मिली.) के बीच पाई गई। सर्वाधिक माध्यमान नियन्त्रण में (0.6) देखा गया। अन्य सारे उपचारों से कोलीफार्म संख्या में ह्रास हुआ जिसका अर्थ हुआ कि दुहाई के पूर्व नियन्त्रण की तुलना में सारे उपचार प्रभावी होते हैं।

इस अध्ययन से यह परिणाम निकला कि दूध के पूर्व अयन धोने के लिए सर्वाधिक लाभप्रद उपचार नीम की पत्ती का निष्कर्ष है। उसके बाद डेटाल, फिर पोटैशियम परमैंगनेट तथा अन्त में नमकीन जल।

निर्देश

1. सिंह, एस. बी. तथा प्रसाद, जे. : लाइवस्टाक एडवाइजर, 1985, 11, 27-30.

2. सेनापति, ए. जैन, पी. के. तथा सिंह, वी. पी. : इण्डियन जर्नल पशु उत्पादन एम. जी. एम. टी., 1991, 7, 86-89.

3. चामर्स, सी. एच. : बैक्टीरिया इन रिलेशन टू मिल्क सप्लाई इडवर्त एरनोल्ड पब्लिकेशन लिमिटेड लन्दन, 1953, पृष्ठ 291.

4. राज, एम. वी. ए. तथा प्रसाद, जे. : लाइवस्टाक एडवाइजर, 1982, 7, 27-30.

5. चेरियन, टी. तथा प्रसाद, जे. : लाइवस्टाक एडवाइजर, 1984, 11, 25-27.

6. त्यागी, ए. के. तथा प्रसाद, जे. : लाइवस्टाक एडवाइडर, 1989, 14, 5-7.

7. नीरज तथा प्रसाद जे. : लाइवस्टाक एडवाइजर, 1989, 15, 6-9.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 2, April 2002.

विभिन्न प्रवेश्यता वाली समान्तर रंध्रमय डिस्कों से होकर गैर-न्यूटनीय तरल के स्तरीय स्रोत प्रवाह के लिए उष्मा अन्तरण

आर. सी. चौधरी
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राज.)

तथा

एच. एस. कालसी
गणित विभाग, एस. जी. एन. खालसा कालेज, श्रीगंगानगर (राज.)

[प्राप्त — अगस्त 30, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में विभिन्न प्रवेश्यता वाली दो समान्तर सरंध्र डिस्कों में से होकर गैर-न्यूटनीय तरल के स्तरीय स्रोत प्रवाह हेतु ताप वितरण तथा उष्मा अन्तरण का अध्ययन किया गया है। प्रवाह प्राचलों की आंकिक गणना की गई है और आरेखों के द्वारा दो डिस्कों पर ताप तथा नूसेल्ट संख्या को इंजेक्शन तथा चूषण के विभिन्न वेगों पर प्रदर्शित किया गया है।

Aabstract

Heat transfer for laminar source flow of a non-Newtonian fluid through parallel porous disks of different permeability. *By* R. C. Chaudhary, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur (Raj.) and H. S. Kälsi, Department of Mathematics, S.G.N. Khalsa College, Sriganganagar (Rajasthan).

The problem of temperature distribution and heat transfer for laminar source flow of non-Newtonian fluid through two parallel porous disks of different permeability has been investigated. The model of non-Newtonian fluid is taken as Walter's B.' Viscous dissipation terms have been included in the energy equation and the injection and/or

suction velocities at the two disks are assumed to be small. The boundaries are kept at constant temperatures. The flow parameters are calculated numerically by power series expansion. The variation of temperature and Nusselt number at the two disks has been depicted graphically for various values of the injection and suction velocities.

प्रस्तावना

पृथ्वी के मैंटल (Mantle) में उष्मा अन्तरण से अनेक भूगर्भीय तथा भूभौतिक पक्षों की विवेचना की जा सकती है।[1] एल्कूह[2] ने दो समान्तर सरंध्र डिस्कों से होकर प्रवाह पर विचार किया है। इन डिस्कों की सीमाओं पर लघु चूषण तथा इंजेक्शन हुआ था। बाद में उन्होंने[3, 4] दो समान्तर स्थिर सरंध्र डिस्कों के मध्य स्रोत प्रवाह पर विचार किया और या तो समान चूषण तथा/अथवा इंजेक्शन के प्रभाव का अध्ययन किया। चौधरी तथा गौड़[5, 6] राजवंशी[7] एवं चौधरी[8] ने न्यूटनीय तरल के लिए ही अपने अपने अध्ययन सम्पन्न किये हैं। क्राउथर इत्यादि ने[9] गैर-न्यूटनीय तरलों पर किये गये शोध कार्य का विस्तृत वर्णन किया है। सचेती तथा भट्ट[10], मिश्रा[11], राजवंशी तथा चौधरी[12, 13], कालसी तथा चौधरी[14] ने विभिन्न प्रकार के मान न्यूटनीय तरलों पर सरंध्र डिस्कों में से होकर स्रोत प्रवाह पर विचार किया है। शेनाय तथा मशेलकर[15] ने नलिकाओं, सिलिंडरों, शंकुओं तथा प्लेटों में गैर-न्यूटनीय तरलों में उष्मा अन्तरण पर हुए शोध कार्य की समीक्षा प्रस्तुत की है।

प्रस्तुत शोध कार्य में हमने वाल्टर के β' द्रव[16] के स्रोत प्रवाह पर विचार किया है जिसमें दो समान्तर सरंध्र डिस्कों के साथ इंजेक्शन तथा/अथवा चूषण की विभिन्न दरें प्रयुक्त की गई हैं। यह मान लिया गया है कि केन्द्र पर रेखा स्रोत उपस्थित है। प्रवाह चरों को व्यक्त करने के लिए नियमित विक्षोभ का प्रयोग हुआ है।

डिस्कों को स्थिर ताप पर रखा गया। इन दोनों डिस्कों पर स्रोत तथा इंजेक्शन/चूषण का प्रभाव ताप तथा नुसेल्ट संख्या पर परिगणित किया गया और गैर-न्यूटनीय आरेखों के द्वारा दिखाया गया है।

गति के समीकरण

हम दो अनन्त समान्तर सरंध्र डिस्कों के बीच तरल पर विचार करेंगे और सिलिंडराकार ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ, z) की कल्पना करेंगे। दो डिस्कों के पृष्ठों को क्रमशः $z = -a$ तथा $z = +a$, परिभाषित किया गया है। माना कि उद्गम (स्रोत) की आयतनिक प्रवाह पर Q है। W_1 तथा W_2 क्रमशः ऊपरी तथा निचली डिस्कों पर स्थिर इंजेक्शन का संमात्रा हैं। सीमान्त प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं–

$$u(r, \pm a) = 0$$

$$w(r, +a) = -W_1$$

$$w(r, -a) = W_2 \tag{1}$$

तथा

$$\int_{-a}^{+a} 2\pi\, r u\, dz - \pi r^2 \left(W_1 + W_2\right) = \theta \tag{2}$$

जहाँ u तथा w क्रमशः r तथा z दिशाओं में वेग हैं।

ध्रुवीय निर्देशांक तंत्र में ऊर्जा समीकरण का अक्षि-संमितीय रूप होगा

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \phi \tag{3}$$

जहाँ T तरल का ताप है, ρ घनत्व है, C_p स्थिर दाब पर विशिष्ट उष्मा है और K उष्मा चालकता का गुणांक है। श्यान dissipation फलन ϕ को

$$\phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \tag{4}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ μ श्यानता गुणांक है।

सीमान्त प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं—

$$z = -a,\ T = T_1$$

$$z = +a,\ T = T_2 \tag{5}$$

जहाँ T_1 तथा T_2 कतिपय स्थिर ताप हैं।

निम्नांकित अ-विमीय मात्राओं को प्रचारित करने पर

$$\bar{r} = \frac{r}{a},\ \bar{z} = \frac{z}{a},\ \bar{u} = \frac{u a}{\nu},\ \bar{w} = \frac{w a}{\nu}$$

तथा

$$\bar{T} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1},\ \text{जहाँ}\quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{6}$$

समीकरण (6) का उपयोग करने पर (1) का रूप होगा—

$$u\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$+ 2E\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right] \tag{7}$$

जहाँ अ-विमीय मात्राओं से बार (-) हटा लिए गये हैं। $Pr = \frac{\mu C_p}{K}$ प्रैंडल संख्या है, तथा

$$E = \frac{\mu^2}{\rho^2 a^2 C_p (T_2 - T_1)},$$

एकर्ट संख्या है।

(1), (2), (5) तथा (6) समीकरणों से सीमान्त प्रतिबन्ध निम्न रूप में प्राप्त होते हैं—

$$u(r, \pm 1) = 0$$

$$w(r, +1) = -v_1$$

$$w(r, -1) = +v_2 \tag{8}$$

तथा

$$\int_{-1}^{+1} u\, dz - \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right) r = \frac{2\,Re}{r}$$

तथा

$$z = -1,\ T = 0$$

$$z = +1,\ T = 1 \tag{9}$$

जहाँ v_1 (ऊपरी डिस्क की भित्ति रेनोल्ड्स संख्या)

$$= \frac{W_1 a}{\nu}$$

v_2 (निचली डिस्क की भित्ति रेनोल्ड्स संख्या)

$$= \frac{W_2 a}{\nu}$$

Re (स्रोत प्रवाह रेनोल्ड्स संख्या)

$$\frac{Q}{4\pi\, a v}$$

जहाँ पर इंजेक्शन के लिए v_1 तथा v_2 को धन तथा चूषण के लिए ऋण मान लिया गया है।

हल की विधि

एल्कू[3] का अनुसरण करने पर u तथा w के रूप होंगे–

$$u = \frac{1}{2} r f'_{-1} + \frac{\text{Re}}{\text{r}} \left(f'_0 + \frac{\text{Re}}{\text{r}^2} f'_1 + \ldots \right)$$

$$w = -f_{-1} + \left(2 + \frac{\text{Re}^2}{\text{r}^4} f_1 + \ldots \right) \tag{10}$$

जहाँ प्राइम से z के प्रति अवकल गुणांक सूचित होता है तथा $f_n(z)$ विमाहीन फलन हैं जिन्हें संवेग समीकरणों से ज्ञात किया जाना है।

समीकरण (7) में (10) का प्रतिस्थापन करने पर

$$\left(\frac{1}{2} r f'_{-1} + \frac{\text{Re}}{\text{r}} f'_0 + \frac{\text{Re}^2}{\text{r}^3} f'_1 + \ldots \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \left(-f_{-1} + 2\, \frac{\text{Re}^2}{\text{r}^4} f_1 + \ldots \right) \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + E \Big[3 f'^2_{-1} + \frac{1}{4} r^2 f''^2_{-1} \frac{\text{Re}}{r^2} \Big\{ r^2 f''^2_{-1} f''_0$$

$$+ \text{Re}\left(f''_0 + f''_{-1} f''_1 \right) + \frac{\text{Re}}{\text{r}^2} \left(4 f'^2_0 - 12 f'_{-1} f'_1 - 8 f''_{-1} f_1 \right)$$

$$+ \frac{2\,\text{Re}^2}{r^2} f''_0 f''_1 \Big\} \Big] \tag{11}$$

जहाँ पर ($\frac{1}{r^4}$) तक के पदों को दक्षिण पक्ष में जैसे का तैसा रहने दिया गया। समीकरण (11) से यह सुझाव मिलता है कि रूप T को

$$T(r, z) = r^2 T_2(z) + T_0(z) + \frac{1}{r^2} T_{-2}(z) + \frac{1}{r^4} T_{-4}(z) + \ldots \tag{12}$$

होना चाहिए।

(11) में (12) को प्रतिस्थापित करके तथा दोनों पक्षों में r के समान घातों के गुणांकों को सन्तुलित करते हैं। इससे सामान्य अवकल समीकरणों का सेट प्राप्त होता है। प्रथम चार अवकल समीकरण निम्नवत् हैं—

$$T_2 f'_{-1} - T'_2 f_{-1} = \frac{T''_2}{Pr} + \frac{E}{4} f''^2_{-1} \tag{13}$$

$$2\,\text{Re}\, T_2 f'_0 - f_{-1} T'_2 = \frac{4T_2}{Pr} + \frac{T''_0}{Pr} + 3E f'^2_{-1} + \text{Re}\ E f''_{-1} f''_0 \tag{14}$$

$$- T_{-2} f'_{-1} + 2\text{Re}^2 f'_1 T_2 - f_{-1} T'_{-2} + 2\text{Re}^2 f_1 T'_2$$

$$= \frac{T''_{-2}}{Pr} + E\,\text{Re}^2 f''_0 + E\,\text{Re}^2 f''_{-1} f''_1 \tag{15}$$

$$- 2 T_{-4} f'_{-1} - T'_{-4} f_{-1} + 2\text{Re}^2 f_1 T'_0 - 2\text{Re}\, f'_0 T_{-2}$$

$$= \frac{4T_{-2}}{Pr} + \frac{T''_{-4}}{Pr} + 4E\,\text{Re}^2 f'^2_0 - 12\,E\,\text{Re}^2 f'_{-1} f'_1$$

$$+ 2E\,\text{Re}^3 f''_0 f''_1 + 8E\,\text{Re}^2 f''_{-1} f_1 \tag{16}$$

परिवर्धित सीमान्त प्रतिबन्ध हैं—

$$T_n(-1) = 0\,;\ n = -4,\ -2,\ 0,\ 2$$

$$T_n(+1) = 0\,;\ n = -4,\ -2,\ 2$$

$$T_0(+1) = 1 \tag{17}$$

माना कि

$$T_n = T_{n,0} + v_1 T_{n,1} + v_2 T_{n,2} + v_1^2 T_{n,11} + v_2^2 T_{n,22} + 2v_1 v_2 T_{n,12} \tag{18}$$

जहाँ

$$n = 2,\ 0,\ -2,\ -4$$

$$f_{-1} = v_1 f_{-1,1} + v_2 f_{-1,2} + v_1^2 f_{-1,11} + 2v_1 v_2 f_{-1,12} + v_1^2 f_{-1,22}$$

$$f_0 = f_{0,0} + v_1 f_{0,1} + v_2 f_{0,2} + v_1^2 f_{0,11} + 2v_1 v_2 f_{0,12} + v_2^2 f_{0,22}$$

$$f_1 = f_{1,0} + v_1 f_{1,1} + v_2 f_{1,2} + v_1^2 f_{1,11} + 2v_1 v_2 f_{1,12} + v_2^2 f_{1,22} \qquad (19)$$

(13) से (16) तक के समीकरणों में (18) तथा (19) का प्रयोग करने पर हमें T_2, T_0 T_{-2} एवं T_{-4} के लिए अवकल समीकरणों के चार सेट प्राप्त होते हैं। लेकिन लम्बे होने के कारण उन्हें यहाँ नहीं दिया जा रहा।

$Z = \pm 1$ पर सीमान्त प्रतिबन्ध निम्न रूप धारण करते हैं–

$$z = \pm 1;\ T_{2,0} = T_{2,1} = T_{2,2} = T_{2,11} = T_{2,12} = T_{2,22}$$

$$= T_{0,1} = T_{0,2} = T_{0,11} = T_{0,12} = T_{0,22}$$

$$= T_{-2,0} = T_{-2,1} = T_{-2,2} = T_{-2,12} = T_{-2,22} = T_{2,11}$$

$$= T_{-4,0} = T_{-4,1} = T_{-4,2} = T_{-4,11} = T_{-4,12} = T_{-4,22} = 0 \qquad (20)$$

तथा $z = +1$ पर $T_{0,0} = 1$

$$z = -1;\ T_{0,0} = 0$$

काल्सी तथा चौधरी ने[14] f_{-1}, f_0 तथा f_1 घटकों के मान ज्ञात किये हैं अतः ताप T को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है—

$$T = \frac{r^2 Pr\, E}{16}\left\{v_1^2\left(-z + z^3\right) + \frac{3}{4}\left(1 - z^4\right)\left(2v_1 v_2 + v_2^2\right)\right\} + \frac{1}{2}(z + 1)$$

$$+ Pr\left[\frac{1}{160}\left(-20 + 9z + 20z^2 - 10z^3 + z^5\right)\left(v_1 + v_2\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{1612800} \left\{ v_1^2 \left(9240 + 613 z - 12600 z^2 - 1140 z^3 + 4200 z^4 \right.\right.$$

$$\left. + 702 z^5 - 840 z^6 - 180 z^7 + 5 z^9 \right)$$

$$+ 2 v_1 v_2 \left(613 z - 1140 z^3 + 702 z^5 - 180 z^7 + 5 z^9 \right)$$

$$+ v_2^2 \left(- 9240 + 613 z + 12600 z^2 - 1140 z^3 - 4200 z^4 \right.$$

$$\left.\left. + 702 z^5 + 840 z^6 - 180 z^7 + 5 z^9 \right) \right\}$$

$$+ \frac{E}{480} \left[\left\{ v_1^2 \left(297 - 14 z - 405 z^2 + 20 z^3 + 135 z^4 - 6 z^5 - 27 z^6 \right) \right.\right.$$

$$\left. + 3 \left(113 - 150 z^2 + 45 z^4 - 8 z^6 \right) \left(2 v_1 v_2 + v_2^2 \right) \right\}$$

$$\left. + \frac{S}{5600} \left\{ v_1^2 \left(40 z - 35 z^3 - 5 z^7 \right) + 2 v_1 v_2 \left(19 z - 35 z^3 + 21 z^5 - 5 z^7 \right) \right\} \right]$$

$$+ Pr^2 \left\{ \frac{1}{1612800} \left(10920 - 32209 z + 22680 z^2 + 22260 z^3 - 37800 z^4 \right.\right.$$

$$\left.\left. + 12474 z^5 + 4200 z^6 - 2700 z^7 + 175 z^9 \right) \left(v_1 + v_2 \right)^2 \right\}$$

$$+ Pr \, \mathrm{Re} \, E \left[\frac{3}{8} \left(1 - z^4 \right) \left(v_1 + v_2 \right) + \frac{1}{8960} \left\{ v_1^2 \left(207 + 112 z - 1120 z^3 - 666 z^4 \right.\right.\right.$$

$$1008\,z^5 + 504\,z^6 - 45\,z^8\Big) + 18\,v_1 v_2\Big(23 - 74\,z^4 + 56\,z^6 - 5\,z^8\Big)$$

$$+ v_2^2\Big(207 - 112\,z + 1120\,z^3 - 666\,z^4 - 1008\,z^5 + 504\,z^6 - 45\,z^8\Big)\Big\}$$

$$+ \frac{Pr}{17920}\Big\{8\,v_1^2\Big(-69 + 122\,z - 70\,z^3 - 42\,z^5 + 84\,z^6 - 10\,z^7 - 15\,z^8\Big)$$

$$+3\Big(-521 + 224\,z + 420\,z^2 - 70\,z^4 - 224\,z^5 + 196\,z^6 - 25\,z^8\Big)\Big(2\,v_1 v_2 + v_2^2\Big)$$

$$+ \frac{9\,S}{40}\Big(1 - 3\,z^4 + 2\,z^6\Big)\Big(v_1^2 + 2\,v_1 v_2 + \frac{2}{3}\,v_2^2\Big)\Big]$$

$$+ r^{-2}\Big[Pr\,E\,\mathrm{Re}^2\Big\{\frac{1}{2240}\Big(1120\Big(z^3 - z\Big) + v_1\Big(-83 - 68\,z + 280\,z^2$$

$$+ 144\,z^3 - 338\,z^4 - 84\,z^5 + 168\,z^6 + 8\,z^7 - 27\,z^8\Big)$$

$$+ v_2\Big(197 - 68\,z - 280\,z^2 + 144\,z^3 - 58\,z^4 - 84\,z^5 + 168\,z^6 + 8\,z^7 - 27\,z^8\Big)\Big)$$

$$+ \frac{Pr}{560}\Big(35 - 24\,z - 70\,z^2 + 70\,z^3 + 35\,z^4 - 56\,z^5 + 10\,z^7\Big)\Big(v_1 + v_2\Big)$$

$$+ \frac{3\,S}{10}\Big(1 - z + 2\,z^3 - 3\,z^4 - z^5 + 2\,z^6\Big)\Big(v_1 + v_2\Big)\Big]$$

$$+ r^{-4}\Big[Pr\,\mathrm{Re}^2\Big\{\frac{1}{33600}\Big(-157\,z + 300\,z^3 - 198\,z^5 + 60\,z^7 - 5\,z^9\Big)$$

$$+ \frac{S}{350}\left(-19z + 35z^3 - 21z^5 + 5z^7\right)$$

$$+ \frac{Pr\,E\,\mathrm{Re}}{140}\left(-19z + 35z^3 - 21z^5 + 5z^7\right)\Bigg\}$$

$$+ Pr\,E\,\mathrm{Re}^2\left\{\frac{1}{30}\left(99 - 7z - 135z^2 + 10z^3 + 45z^4 - 3z^5 - 9z^6\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3\,\mathrm{Re}}{560}\left(19 - 66z^4 + 56z^6 - 9z^8\right) + \frac{6S}{5}\left(1 - 3z^4 + 2z^6\right)\right\}\Bigg] \quad (21)$$

जो v_1 तथा v_2 में द्वितीय कोटि तक सही है।[5, 6, 8] के परिणाम (2.1) की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

उष्मा अंतरण को नुसेल्ट संख्या के रूप में व्यक्त किया जाता है जिसे विमीय मात्राओं के रूप में

$$(Nu) = \frac{2\,d\,Q*}{K\left(T_2 - T_1\right)} \quad (22)$$

के द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$Q* = \frac{1}{\pi\left(r^2 - r_0^2\right)}\int_{r_0}^{r}(2\pi\, r\, q)\, dr$$

तथा

$$q = -K\frac{\partial T}{\partial z}$$

इसमें $Q*$ तथा q अपने व्यंजकों से स्वतः स्पष्ट हैं, r_0 किसी भी एक डिस्क के केन्द्र से दिये हुए बिन्दु तक की दूरी है।

(6) की तरह अविमीय मात्राओं का प्रयोग करते हुए तथा ऊपर की रेखाओं को हटाते हुए, $Q*$ का मान $z=-1$ तथा $z=+1$ के लिए प्राप्त करते हुए (21) के प्रयोग से निचली डिस्क $[(Nu)_{-1}]$ तथा ऊपरी डिस्क $[(Nu)_{+1}]$ की नुसेल्ट संख्याओं को निम्नांकित द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

$$(Nu)_{z=-1} = \frac{4}{r_0^2(1-\lambda^2)}\left[\frac{r_0^3(\lambda^3 - 1)}{3}\left\{\frac{Pr\,E}{16}\left(2v_1^2 + 6v_1v_2 + 3v_2^2\right)\right\}\right.$$

$$+ r_0(\lambda - 1)\left\{\frac{1}{2} + Pr\left(v_1 + v_2\right)\left(-\frac{7}{20} + \frac{3\,\text{Re}\,E}{2} + \frac{313}{3150}\,Pr\left(v_1 + v_2\right)\right.\right.$$

$$\left.+ \frac{\text{Re}\,E}{5}\left(v_1 + v_2\right)\right)$$

$$+ \frac{Pr}{1400}\left(\frac{1}{9}\left(101\,v_1^2 - 8\,v_1 v_2 - 109\,v_2^2\right) - S\left(25\,v_1^2 + 8\,v_1 v_2\right)\right)$$

$$\left.+ \frac{Pr\,E}{20}\left(\frac{1}{3}\left(56\,v_1^2 + 126\,v_1 v_2 + 63\,v_2^2\right) - \frac{Pr\,\text{Re}}{7}\left(47\,v_1^2 + 114\,v_1 v_2 + 57\,v_2^2\right)\right)\right\}$$

$$+ \frac{(\lambda - 1)}{\lambda\, r_0}\left\{Pr\,E\,\text{Re}^2\left(1 - \frac{3\,Pr}{70}\left(v_1 + v_2\right)\right)\right\}$$

$$\left.+ \frac{(\lambda^3 - 1)}{3\lambda^3\, r_0^3}\left\{\frac{4\,Pr\,E\,\text{Re}^2}{5}\left(\frac{Pr\,\text{Re}}{7} + \frac{19}{3}\right) + \frac{2\,Pr\,\text{Re}^2}{175}\left(\frac{1}{3} + 4\,S\right)\right\}\right] \qquad (23)$$

तथा

$$(Nu)_{z=+1} = \frac{4}{r_0^2(1 - \lambda^2)}\left[\frac{r_0^3(\lambda^3 - 1)}{3}\left\{\frac{Pr\,E}{16}\left(2\,v_1^2 - 6\,v_1 v_2 - 3\,v_2^2\right)\right\}\right.$$

$$+ r_0(\lambda - 1)\left\{\frac{1}{2} + Pr\left(v_1 + v_2\right)\left(\frac{3}{20} - \frac{3\,\text{Re}\,E}{2} - \frac{Pr}{1575}\left(v_1 + v_2\right)\right.\right.$$

$$\left.+ \frac{\text{Re}\,E}{5}\left(v_1 + v_2\right)\right)$$

$$+ \frac{Pr\,E}{20}\left(\frac{Pr\,E}{7}\left(v_1^2 + 30\,v_1 v_2 + 15\,v_2^2\right) - \frac{1}{3}\left(52\,v_1^2 + 126\,v_1 v_2 + 63\,v_2^2\right)\right)$$

$$+ \frac{Pr}{1400}\left(\frac{1}{9}\left(-109\,v_1^2 - 8\,v_1 v_2 + 101\,v_2^2\right) - S\left(25\,v_1^2 + 8\,v_1 v_2\right)\right)\Bigg\}$$

$$+ \frac{(\lambda - 1)}{\lambda\, r_0}\left\{Pr\,E\,\mathrm{Re}^2\left(1 - \frac{3}{70}\,Pr\left(v_1 - v_2\right)\right)\right\}$$

$$+ \frac{(\lambda^3 - 1)}{3\lambda^3\, r_0^3}\left\{\frac{4}{5}\,Pr\,E\,\mathrm{Re}^2\left(\frac{Pr\cdot\mathrm{Re}}{7} - \frac{17}{3}\right) + \frac{2\,Pr\,\mathrm{Re}^2}{175}\left(\frac{1}{3} + 4\,S\right)\right\}\Bigg] \qquad (24)$$

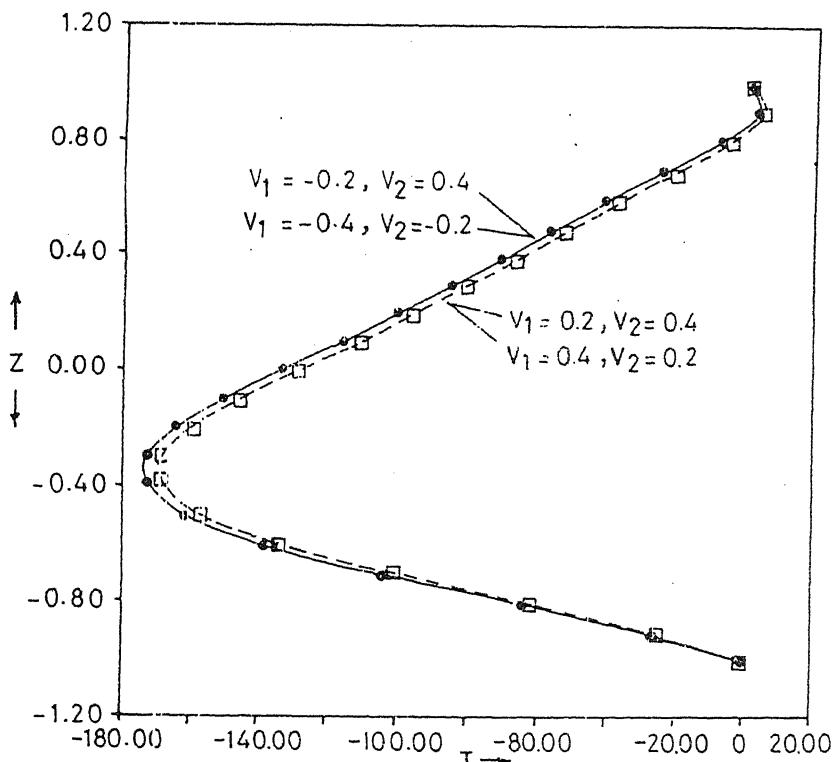
जहाँ

$$\lambda = \frac{r}{r_0}\cdot$$

सांख्यिक विवेचना

चित्र 1 में ताप के विचलन को Z के विरुद्ध दिखाया गया है। *S, E, Pr, r* तथा Re के मानों को 0.1, 0.01, 1,100 एवं 1000 लिया गया है और v_1 तथा v_2 के विभिन्न मानों के लिए स्थिर रखा गया है। डिस्कों पर इंजेक्शन की विभिन्न दरों के लिए ताप प्रोफाइलों ($v_1 = 0.2, v_2 = 0.4; v_1 = 0.4, v_2 = 0.2$); चूषण ($v_1 = -0.4, v_2 = -0.2$); चूषण तथा इंजेक्शन ($v_1 = -0.2, v_2 = 0.4$) को दिखाया गया है। निचली डिस्क के परिपार्श्व में शीतलन प्रभाव देखा जाता है किन्तु ज्यों ज्यों तरल कण मध्य तल से ऊपरी डिस्क की ओर गति करते हैं, ताप बढ़ता जाता है क्योंकि निचली पट्टी को T = 0 पर रखा जाता है। स्रोत (उद्‌गम) की उपस्थिति जो इंजेक्शन या चूषण के प्रभाव पर हावी रहती है ताप प्रोफाइल को ऋणात्मक बनाती है। अतः स्रोत के कारण निचला क्षेत्र ऊपरी क्षेत्र की तुलना में अधिक शीतल बन जाता है। स्रोत से स्वतन्त्र प्रवाह में ताप प्रोफाइलें धनात्मक क्षेत्र में परावलयी पाई जाती हैं। मजेदार बात यह है कि ये प्रोफाइलें भिन्न इंजेक्शन के लिए तथा जब चूषण किसी एक या दोनों डिस्कों पर होता है तो वे संगमित होती हैं।

चित्र 2 से 5 डिस्कों पर नुसेल्ट संख्या में होने वाले विचलन λ ($= \frac{r}{r}\cdot$) के विरुद्ध दर्शाते हैं। *S, E, Pr, r* तथा Re के मान 0.1, 0.01, 1, 10 तथा 1000 लिये जाते हैं और v_1 तथा v_2 के विभिन्न मानों के लिए स्थिर रखे जाते हैं।

चित्र 2 में निचली डिस्क के के लिए इंजेक्शन की विभिन्न दरों ($v_1 = 0.2, v_2 = 0.4$; $v_1 = 0.4, v_2 - 0.2$) के लिए नुसेल्ट संख्या, चूषण ($v_1 = -0.2, v_2 = -0.4$; $v_1 = -0.4, v_2 = -0.2$) दिखाये गये हैं। दोनों ही डिस्कों पर इंजेक्शन या चूषण से नुसेल्ट संख्या बढ़ती जाती है किन्तु ज्यों ज्यों केन्द्र से दूर जाया जाता है, यह वृद्धि काफी मन्द होती जाती है। फिर भी चूषण के मामले में इंजेक्शन की तुलना में इसकी मात्रा (magnitude) अधिक है। यदि डिस्कों पर इंजेक्शन या चूषण की दरों को उलट दिया जाय तो नुसेल्ट संख्या वैसी ही बनी रहती है।

चित्र 1 : इंजेक्शन/चूषण वेगों के विभिन्न मानों के लिए ताप वितरण

चित्र 3 में निचली डिस्क पर इंजेक्शन चूषण की विभिन्न दरों ($v_1 = -0.2, v_2 = 0.4$; $v_1 = -0.4, v_2 = 0.2$) ; चूषण तथा इंजेक्शन ($v_1 = 0.4, v_2 = -0.4$; $v_1 = 0.2, v_2 = -0.4$) के लिए नुसेल्ट संख्या प्रदर्शित है। सभी दशाओं में निचली डिस्क पर नुसेल्ट संख्या का मान बढ़ता है किन्तु केन्द्र से आगे यह संख्या धीरे-धीरे बढ़ती है। $v_1 = 0.2, v_2 = -0.4$; $v_1 = -0.4, v_2 = 0.2$ मानों के लिए नुसेल्ट संख्या वही रह जाती है जो यह बताता है कि डिस्क पर भित्ति रेनाल्ड की संख्याओं को परस्पर बदलने पर नुसेल्ट संख्या में कोई परिवर्तन नहीं आता। किन्तु अन्य दशाओं में नुसेल्ट संख्या की मात्रा में अन्तर होता है।

चित्र 4 तथा 5 में λ के विरुद्ध ऊपरी डिस्क पर नुसेल्ट संख्या में विचरण को दर्शाया गया है। यह लगातार ऋणात्मक है और ज्यों ज्यों डिस्कों के केन्द्र से दूर जाया जाता है, उसमें लगातार वृद्धि देखी जाती है।

चित्र 4 में इंजेक्शन या चूषण की विभिन्न दरों के लिए नुसेल्ट संख्या का आलेखन हुआ है। दोनों ही डिस्कों में इंजेक्शन तथा चूषण की दशा में नुसेल्ट संख्या में उल्लेखनीय वृद्धि होती है। किन्तु इंजेक्शन या चूषण की विभिन्न दरों पर अन्तर अत्यन्त लघु है।

Nu at Z = - 1 , S = 0.1
V1 = 0.2, V2 = 0.4
V1 = 0.4, V2 = 0.2
V1 = - 0.2, V2 = - 0.4
V1 = - 0.4, V2 = - 0.2
11.00
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
λ ↑
1160.00 1180.00 1200.00 1220.00 1240.00 1260.00 1280.00 1300.00 1320.00 1340.00
Nu →

चित्र 2

Nu at Z = - 1, S = 0.1
V1 = - 02, V2 = 0.4
V1 = 0.4 , V2 = - 0.4
V1 = 0.2, V2 = - 0.4
V1 = - 0.4, V2 = 0.2
11.00
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
λ ↑
1180.00 1200.00 1220.00 1240.00 1260.00 1280.00 1300.00 1320.00
Nu →

Nu at Z = +1, S = 0.1
V1 = - 0.4, V2 = - 0.2
V1 = - 0.2, V2 = - 0.4
V1 = 0.4 , V2 = 0.2
V1 = 0.2 , V2 = 0.4
11.00
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
λ
−2.80 −2.40 −2.00 −1.60 −1.20 −0.80 −0.40 0.00
Nu →
Nu at Z = +1, S = 0.1
V1 = - 0.4, V2 = 0.2
V1 = 0.2 , V2 = - 0.4
V1 = 0.4, V2 = - 0.4
V1 = - 0.2, V2 = - 0.4
11.00
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
λ
−2.40 −2.20 −2.00 −1.80 −1.60 −1.40 −1.20 −1.00 −0.80 −0.60 −0.40

चित्र 4

चित्र 5 में डिस्कों पर चूषण तथा इंजेक्शन की विभिन्न दरों के लिए नुसेल्ट संख्या दर्शाई गई है। यहाँ पर भी v_1 तथा v_2 के विभिन्न मानों के लिए λ में वृद्धि के साथ नुसेल्ट संख्या में वृद्धि देखी जाती है। किन्तु जब डिस्कों पर भिन्न-भिन्न चूषण होता है तो नुसेल्ट संख्या का मान सर्वाधिक होता है।

निर्देश

1. पार्मेन्टिर, ई. एम., J. Fluid Mech., 1978, 84, 1.
2. एल्कूह, ए. एफ., : J. Engg. Mech. Div., ASCE, 1967, 93, 31.
3. वही., Appl. Sci. Res., 1969, 21, 204.
4. वही., Appl. Sci. Res., 1971, 23, 431.
5. चौधरी, आर. सी. तथा गौड़, वाई. एन., Proc. Ind. Acad. Sci., 1978, 87A, 209.
6. चौधरी, आर. सी. तथा गौड़, वाई. एन., Def. Sci. J. 1980, 30, 153.
7. राजवंशी, एस. सी., Ind. J. Phys., 1973, 47, 16.
8. चौधरी, आर. सी., Acta Ciencia Ind., 1989, XVM, 323.
9. क्रूयथर, आई. इत्यादि, Phil. Trans, R. Soc. Lond. 1991, A. 337, 467.
10. सचेती, एन. सी. तथा भट्ट, बी. एस., ZAMM, 1975, 55, 43.
11. मिश्रा, एस. पी., J. Appl. Phys. (USA), 1972, 43.
12. चौधरी आर. सी. तथा राजवंशी, एस. सी., Ind. J. Phys., 1973, 47, 24.
13. वही., Bul. de L'Acad, Polo. Des Sci., 1973, 21, 855.
14. कलसी, एस. तथा चौधरी, आर. सी., Ganita Sandesh, 1992, 6, 83.
15. शेनाय, ए. वी. तथा मशेलकर, आर. ए., Adv. in Heat Trans., 1982, 15, 143.
16. वल्टर्स, के., Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960, 13, 444.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 2, April 2002.

त्वरित ऊर्ध्व सरंध्र प्लेट में अस्थायी MHD मुक्त संवहनी उष्मा तथा द्रव्यमान स्थानान्तरण प्रवाह

एस. एस. ताक तथा गोविन्द पाठक
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे. एन. वी. यूनिवर्सिटी, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त — जनवरी 1, 2002]

सारांश

एक अनन्त उष्मा ऊर्ध्व त्वरित प्लेट में जो समय के किसी घात के समानुपाती वेग से गतिमान है उसमें असमान चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में तरल के अनन्त द्रव्यमान में अस्थायी मुक्त संवहन प्रवाह में द्रव्यमान, संवेग तथा उष्मा स्थानन्तरण का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Unsteady MHD free convective heat and mass transfer flow along an accelerated vertical porous plate. *By* S. S. Tak and Govind Pathak, Department of Mathematics and Statistics, J. N. V. University, Jodhpur (Raj.).

Mass, momentum and heat transfer in unsteady free convection flow along an infinite hot vertical accelerated plate, moving with velocity proportional to some power of time, in infinite mass of fluid at rest in presence of uniform transverse magnetic field fixed to the fluid, has been investigated. The different cases of uniform and non-uniform acceleration of the plate have been considered. Similar solution of energy boundary layer equation, for a particular form of injection velocity $V_w(t)$ is obtained. For solution of momentum boundary layer equation, a series expansion of velocity function in powers of product of magnetic field parameter and time is assumed. The analytical solutions of resulting ordinary differential equations have been obtained in terms of

complementary error functions and repeated integrals of complementary error function. It has been observed that the flow becomes fully developed at non-dimensional time t = 0.6.

अर्ध-अनन्त समतापीय ऊर्ध्वाधर प्लेट में से होकर तरलों के स्थायी मुक्त संवहन प्रवाह का अध्ययन अनेक शोधकर्ताओं द्वारा हुआ है[1-3], सिंह इत्यादि[4], सिंह तथा कुमार[5], ताक तथा महर्षि[6], महर्षि तथा ताक[2] ने एक अनन्त ऊर्ध्वाधर सरंध्र प्लेट द्वारा बद्ध सरंध्र माध्यम से होकर मुक्त संवहन प्रवाह पर स्थिर चूषण पर प्रवेश्यता विचलन के प्रभावों का अध्ययन किया है। इसी तरह अन्य शोधकर्ताओं ने[8-14] मुक्त संवहन प्रवाह में द्रव्यमान, संवेग तथा उष्मा स्थानान्तरण का अध्ययन अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में समान रूप से त्वरित अनन्त सरंध्र प्लेट पर किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में एक अनन्त ऊर्ध्व त्वरित प्लेट में, जो अ-समान त्वरण के साथ से गतिशील है, तरल से स्थिरकृत अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में मुक्त संवहन प्रवाह में अस्थायी द्रव्यमान संवेग तथा उष्मा स्थानान्तरण का अध्ययन किया गया है।

गणितीय सूत्रण तथा विश्लेषण

बाह्य स्पीसीज की उपस्थिति में अनन्त ऊर्ध्व सरंध्र अ-चालक त्वरित प्लेट में विश्राम की स्थिति में द्रव के अनन्त द्रव्यमान पर, एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में एक असंपीड्य विद्युत चालक तरल के अस्थायी प्रवाह पर विचार करें। समय $t' \leq 0$ पर प्लेट तथा तरल पर ताप तथा बाह्य स्पीसीज सान्द्रण को क्रमशः T'_∞ तथा C'_∞ मान लिया गया है। $t' > 0$ के लिए प्लेट पर प्लेट ताप तथा स्पीसीज सान्द्रण को अन्तःक्षेपण/ऊर्ध्वपातन द्वारा बढ़ा कर क्रमशः T'_w तथा C'_w कर दिया गया है और यह कल्पना की गई है कि प्लेट सहसा ऊपरी दिशा में त्वरण $A\alpha t'^{\alpha-1}$ के साथ त्वरित होती है जहाँ A विमीय अचर है तथा $\alpha \geq 1$ वास्तविक संख्या है।

अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र को तरल के सापेक्ष स्थिर मान लिया गया है। अतः प्लेट के निकट तरल की ऊपर दिशा में गति प्लेट की गति तथा मुक्त संवहन दोनों के द्वारा होती है। x' अक्ष को प्लेट की ऊपरी दिशा में तथा y' अक्ष को इसके समकोण लिया गया है। लघु सान्द्रण स्तर पर ऊर्जा समीकरण में सोरेट-डुफूर प्रभावों को उपेक्षित कर दिया गया है। तरल की विद्युत चालकता इतनी अल्प मानी गई है कि प्रयुक्त चुम्बकीय क्षेत्र की तुलना में प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र की उपेक्षा की जा सकती है। तब बूसिनेस्क के सन्निकटनों के आधार पर घर्षणात्मक उष्मा की अनुपस्थिति में प्रवाह को नियन्त्रित करने वाले समीकरण बंसल[5] के

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad \rightarrow v' = v'_w(t') \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + g\beta\left(T' - T'_\infty\right) + g\beta^*\left(C' - C'_\infty\right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}u' \tag{2}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{\kappa}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + v'\frac{\partial C'}{\partial y'} = D\frac{\partial^2 C'}{\partial y'^2} \tag{4}$$

जहाँ u' तथा v' वेग के अनुदैर्घ्य तथा सामान्य घटक हैं, ν काइनैमैटिक श्यानता है, T ताप है, C सान्द्रण D द्रव्यमान विसरण का गुणांक, g गुरुत्व के कारण त्वरण, β तापीय प्रसार का गुणांक है, β^* स्पीसीज़ सान्द्रण प्रसार का गुणांक, k तापीय चालकता, C_p स्थिर दाब पर विशिष्ट उष्मा, σ वैद्युत चालकता, P घनत्व तथा B_0 एक समान व्यवहृत चुम्बकीय क्षेत्र शक्ति है।

प्रारम्भिक तथा परिसीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं

$$t' \leq 0 : u' = 0,\ v' = 0,\ T' = T'_\infty,\ C' = C'_\infty\ \forall y'$$

$$t' > 0 : u' = A t'^{\alpha},\ v' = v_w(t'),\ T' = T'_w = T'_\infty\left(I + B t'^{\alpha-1}\right)$$

$$C' = C'_w = C'_\infty\left(1 + B t'^{\alpha-1}\right)\ at\ y' = 0$$

$$u' = 0,\ T' = T'_\infty\ \ C' = C'_\infty\ \text{ज्योंज्यों}\ y' \to \infty \tag{5}$$

जहाँ

$$A = \frac{u_0^{2\alpha+1}}{\nu^{\alpha}},\quad B = \frac{u_0^{2\alpha-2}}{\nu^{\alpha-1}},$$

uo अचर है जिसकी विमा चाल की है तथा $\alpha \geq 1$ वास्तविक संख्या है। यहाँ पर ध्यान देने योग्य है कि $\alpha \geq 1$ प्लेट के एक समान त्वरण के संगत है जिसका अध्ययन देव आदि कर चुके हैं।[14]

निम्नांकित अ-विभीय मात्राओं का प्रयोग करने पर

$$y = \frac{y' u_0^2}{\nu},\ t = \frac{t' u_0^2}{\nu},\ u = \frac{u'}{u_0},\ \nu = \frac{\nu'}{u_0},\ \nu_w = \frac{\nu'_w}{u_0},$$

$$\theta = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty},\ C = \frac{C' - C'_\infty}{C'_w - C'_\infty},\ Gr = \frac{\nu g \beta T'_\infty}{u_0^3} \text{(ग्रासहाप संख्या)}$$

$$m = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho u_0^2} \text{(चुम्बकीय प्राचल)} \qquad Gc = \frac{\nu g \beta^* C'_\infty}{u_0^3} \text{(परिष्कृत ग्रासहाफ संख्या)}$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa} \text{ (प्रैंडल संख्या)} \qquad Sc = \frac{\nu}{D} \text{ (श्मिट संख्या)}$$

तथा निम्नांकित रूपान्तरों को व्यवहृत करने पर

$$\left.\begin{aligned} u(y, t) &= t\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (mt)^i f_i(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{2\sqrt{t}} \\ \theta(y, t) &= \theta(\eta),\ \ C(y, t) = C(\eta),\ \ \nu_w(t) = -\frac{a}{\sqrt{t}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(2) से लेकर (4) तक के समीकरण निम्नांकित सामान्य रैखिक अवकल समीकरणों में समानीत हो जाते हैं—

$$Pr^{-1}.\theta'' + 2(a + \eta)\theta' - 4(\alpha - 1)\theta = 0 \tag{7}$$

$$Sc^{-1} C'' + 2(a + \eta) C' - 4(\alpha - 1) C = 0 \tag{8}$$

$$f''_0 + 2(a + \eta) f'_0 - 4\alpha f_0 + 4 . Gr . \theta + 4 . Gc . C = 0 \tag{9}$$

$$f''_1 + 2(a + \eta) f'_1 - 4(1 + \alpha) f_1 - 4 f_0 = 0 \tag{10}$$

$$f''_{1,} + 2(a + \eta) f'_1 - 4(i + \alpha) f_1 - 4 f_{i-1} = 0,\quad i \geq 1 \tag{11}$$

प्रारम्भिक तथा परिसीमा प्रतिबन्धों सहित

$$\left.\begin{aligned} \eta = 0 : \theta = 1, \quad C = 1, \quad f_0 = 1, \quad f_i = 0 \quad i \geq 1 \\ \eta \to \infty : \theta = 0, C = 0, f_i = 0, \quad i \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

जहाँ $a \leq 0$ अंतः क्षेपण प्राचल है।

उपर्युक्त अवकल समीकरणों को समांग अंशों से पूरक त्रुटि फलनों के पुनरावृत समाकलों के रूप में हल किया जा सकता है।[16] समीकरण (9) तथा (10) के असमान अंशों के लिए अनिर्धारित गुणांकों की विधि से विशेष समाकल प्राप्त किये गये हैं। (7) से (10) तक के समीकरणों के पूर्ण हलों को जो परिसीमा प्रतिबन्धों (12) को तुष्ट करते हैं निम्नलिखित रूप में दर्शाया जा सकता है।

$$\theta = \frac{i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, \xi)}{i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, a)}, \quad \xi = a + \eta \tag{13}$$

$$C = \frac{i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, \xi)}{i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, a)}, \tag{14}$$

$$f_0(\xi) = A_1\, i^{2\alpha}\, erf_c(\xi) - \frac{4 \,.\, Gr \,.\, i^{2\alpha}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, \xi)}{(Pr - 1)\, i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, a)} - \frac{4 \,.\, Gr \,.\, i^{2\alpha}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, \xi)}{(Sc - 1)\, i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, a)} \tag{15}$$

$$f_1(\xi) = B_1\, i^{2\alpha + 2}\, erf_c(\xi) - A_1\, i^{2\alpha}\, erf_c(\xi) - \frac{16 \,.\, Gr\; i^{2\alpha + 2}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, \xi)}{(Pr - 1)^2\, i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Pr} \,.\, a)} - \frac{16 \,.\, Gr \,.\, i^{2\alpha + 2}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, \xi)}{(Sc - 1)^2\, i^{2\alpha - 2}\, erf_c(\sqrt{Sc} \,.\, a)} \tag{16}$$

जहाँ कि फलन $i^n\, erf_c(\xi)$ पूरक त्रुटिफलन का पुनरावृत समाकल है जो निम्नवत् परिभाषित किया जाता है–

$$i^n erf_c(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{(t-\xi)}{n!} \cdot e^{-t^2} dt, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^k}{2^{n-k} k! \, \Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right)} \tag{18}$$

$$A_1 = \frac{1}{i^{2\alpha} erf_c(a)} + \frac{4 . Gr}{(Pr - 1)} \cdot \frac{i^{2\alpha} erf_c(\sqrt{Pr} . a)}{i^{2\alpha} erf_c(a) . i^{2\alpha-2} erf_c(\sqrt{Pr} . a)}$$

$$+ \frac{4 . Gc}{(Sc - 1)} \cdot \frac{i^{2\alpha} erf_c(\sqrt{Sc} . a)}{i^{2\alpha} erf_c(a) . i^{2\alpha-2} erf_c(\sqrt{Sc} . a)} \tag{19}$$

$$B_1 = \frac{A_1 i^{2\alpha} erf_c(a)}{i^{2\alpha+2} erf_c(a)} + \frac{16 . Gr}{(Pr - 1)^2} \cdot \frac{i^{2\alpha+2} erf_c(\sqrt{Pr} . a)}{i^{2\alpha-2} erf_c(\sqrt{Pr} . a) . i^{2\alpha+2} erf_c(a)}$$

$$+ \frac{16 . Gc}{(Sc - 1)} \cdot \frac{i^{2\alpha+2} erf_c(\sqrt{Sc} . a)}{i^{2\alpha-2} erf_c(\sqrt{Sc} . a) . i^{2\alpha+2} erf_c(a)} \tag{20}$$

यह देखा जा सकता है कि हल (15) तथा (16) वैध है यदि $Pr \neq 1$ तथा $Sc \neq 1$. $Pr = 1$ तथा $Pr = 1$ होने पर परिसीमन मानों को लेने पर—

$$f_0(\xi) = (1 - Gr - Gc) . \frac{i^{2\alpha} erf_c(\xi)}{i^{2\alpha} erf_c(a)} + (Gr + Gc) \frac{i^{2\alpha-2} erf_c(\xi)}{i^{2\alpha-2} erf_c(a)} \tag{21}$$

$$f_1(\xi) = \left(1 - \frac{Gr}{2} - \frac{Gc}{2}\right) . \frac{i^{2\alpha+2} erf_c(\xi)}{i^{2\alpha+2} erf_c(a)} + (Gr + Gc - 1) \frac{i^{2\alpha} erf_c(\xi)}{i^{2\alpha} erf_c(a)}$$

$$- \left(\frac{Gr + Gc}{2}\right) . \frac{i^{2\alpha-2} erf_c(\xi)}{i^{2\alpha-2} erf_c(a)} \tag{22}$$

यह देखा जा सकता है कि प्रथम कोटि के सम्निकटन तक वैश्लेषिक हल प्राप्त किये गये हैं। यद्यपि इसी प्रकार के उच्चतर कोटि के पद प्राप्त किये जा सकते हैं किन्तु तब विश्लेषण अत्यधिक जटिल हो जाता है। चूँकि Pr तथा प्राचल के यादृच्छिक मानों के लिए $erf_c(\sqrt{Pr}\,.\,a)$ जैसे फलन सरलता से प्राप्त नहीं हैं अतः (7) से लेकर (12) तक के अवकल समीकरणों, परिसीमा प्रतिबन्धों (12) के साथ द्वितीय कोटि तक के समीकरणों को भी कम्प्यूटर पर सांख्यिक रीति से हल किया गया है। (7) से (11) तक के समीकरणों के सांख्यिक हल के लिए जैन तथा मेनन[17] द्वारा रैखिक परिसीमा मान प्रश्नों के लिए सुझाई विधि से अज्ञात प्रारम्भिक मानों को परिकल्पित किया गया है। इसके लिए 0.01 चरण आकार वाली रुंगे-कुट्टा-गिल स्कीम का इस्तेमाल हुआ है।

इस तरह प्राप्त सांख्यिक परिणामों की तुलना सारणी 1 दी गई कुछ दशाओं के लिए (13) से (16) तक के हलों से की गई है। इस तरह देखा जा सकता है कि सांख्यिकीय हल द्वारा प्राप्त परिणाम वैश्लेषिक विधि से प्राप्त परिणामों से अच्छी तरह मेल खाते हैं।

उपरिस्तर घर्षण तथा पृष्ठ उष्मा स्थानान्तरण

यहाँ पर उपरिस्तर घर्षण गुणांक C_f तथा स्थानीय नुसेल्ट संख्या **Nu** को निम्नवत् परिभाषित किया गया है–

$$C_f = \frac{\mu\left(\dfrac{\partial u'}{\partial y'}\right)_{y'=0}}{\rho u_0^2/2} \quad \text{तथा} \quad Nu = -\frac{L}{\left(T'_w - T'_\infty\right)}\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)_{y'=0} \tag{23}$$

जिन्हें प्रस्तुत दशा में निम्नांकित रूपों में परिभाषित किया जा सकता है–

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \sum_{i=0}^{\infty} (mt)^i \frac{f'_i(0)}{f'_0(0)}$$

तथा

$$\frac{Nu}{\frac{1}{2}\,\text{Re}} = -\frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta'(0), \ \text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu} \tag{24}$$

जहाँ C_{f0} चुम्बकीय क्षेत्र ($m = 0$) की अनुपस्थिति में उपरिस्तर घर्षण गुणांक है तथा L अनन्त प्लेट की लम्बाई है। i = 0, 1 तथा 2 के लिए $f_i(0)$, $\theta'(0)$ तथा $C'(0)$ फलनों के सांख्यिक मान $Pr = 0.72$; $m = 0.5$ द्वारा प्राप्त किये गये हैं, $a = 0, -0.5$ तथा $Gr = 2.0, 4.0$

सारणी 2 तथा 3 में प्लेट की स्थायी तथा गैर-स्थायी त्वरणों की दशाओं के लिए क्रमशः दिये गये हैं।

सारणी 1

Pr = 0.72, *Sc* = 0.30 *तथा a* = *o के लिए सांख्यिक हल (I) तथा वास्तविक हल, (II) द्वारा प्राप्त परिणामों का तुलनात्मक अध्ययन*

α	*Gr*	*Sc*	θ′ (0)		*C*′ (0)		*f*′₀ (0)		*f*′₁ (0)	
			I	II	I	II	I	II	I	II
1.0	2.0	3.0	-0.95746	-0.95746	0.61805	-0.61804	4.55923	4.55926	-2.13460	-2.13464
1.0	4.0	3.0	-0.95746	-0.95746	-0.61805	-0.61804	7.00092	7.00095	-2.57493	-2.57494
1.0	2.0	5.0	-0.95746	-0.95746	-0.61805	-0.61804	7.47549	7.47549	-2.76271	-2.76271
1.0	4.0	5.0	-0.95746	-0.95746	-0.61805	-0.61804	9.91717	9.91718	-3.20300	-3.20301
2.0	2.0	3.0	-1.91493	-1.91492	-1.23609	-1.23608	1.53500	1.53500	-1.15476	-1.15476
2.0	4.0	3.0	-1.91493	-1.91492	-1.23609	-123608	3.16276	3.16279	-1.33087	-1.33087
2.0	2.0	5.0	-1.91493	-1.91492	-1.23609	-1.23608	3.47915	3.47916	-1.40596	-1.40598
2.0	4.0	5.0	-1.91493	-1.91492	-1.23609	-1.23608	5.10694	5.10694	-1.58209	-1.58210

सारणी 2

भित्ति अपरूपक प्रतिबल फलनों $f'_0(0)$ पृष्ठ उष्मा स्थानान्तरण फलन $\theta'(0)$ तथा सान्द्रण $C'(0)$ के $Pr = 0.72$, $Sc = 0.30$ एवं $\alpha = 1.0$ (प्लेट पर एक्समान त्वरण) पर सांख्यिक मान

Gr	Gc	a	$\theta'(0)$	$C'(0)$	$f'_0(0)$	$f'_1(0)$	$f'_2(0)$
2.0	3.0	0	-0.95746	-0.61805	4.55923	-2.13460	0.38211
4.0	3.0	0	-0.95746	-0.61805	7.00092	-2.57493	0.47377
2.0	5.0	0	-0.95746	-0.61805	7.47549	-2.76271	0.52558
4.0	5.0	0	-0.95746	-0.61805	9.91717	-3.20300	0.61725
2.0	3.0	-0.5	-0.55099	-0.44279	4.69320	-2.05544	0.37110
4.0	3.0	-0.5	-0.55099	-0.44279	7.14454	-2.51614	0.47115
2.0	5.0	-0.5	-0.55099	-0.44279	7.36384	-2.61262	0.49988
4.0	5.0	-0.5	-0.55099	-0.44279	9.81518	-3.07330	0.59992

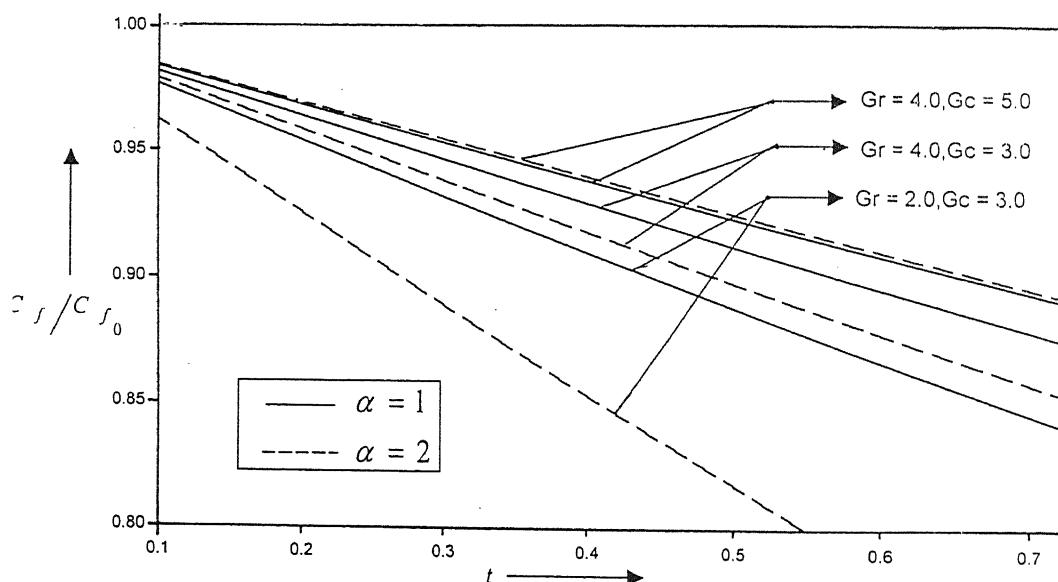
सारणी 3

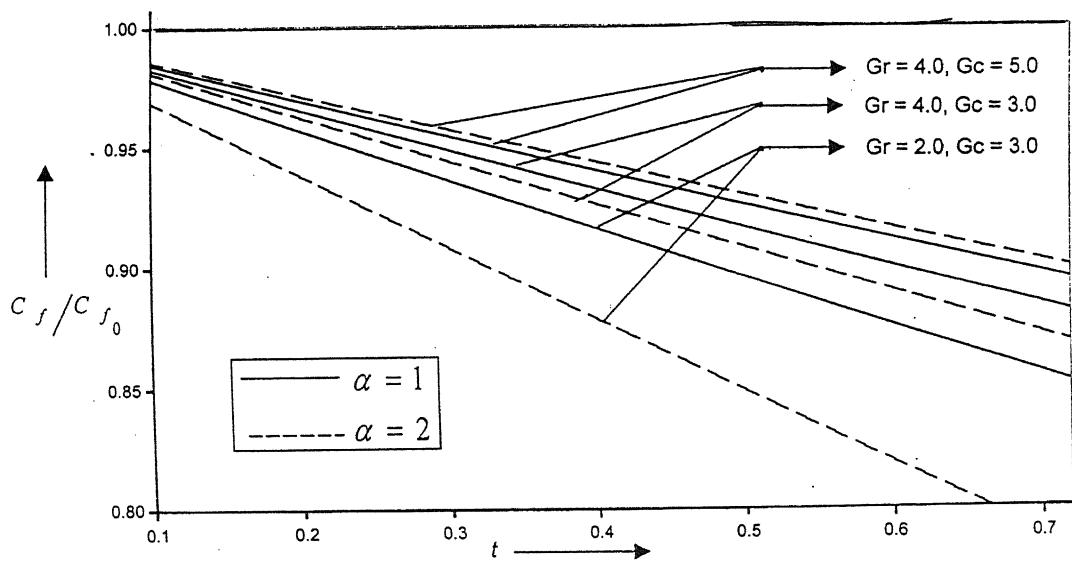
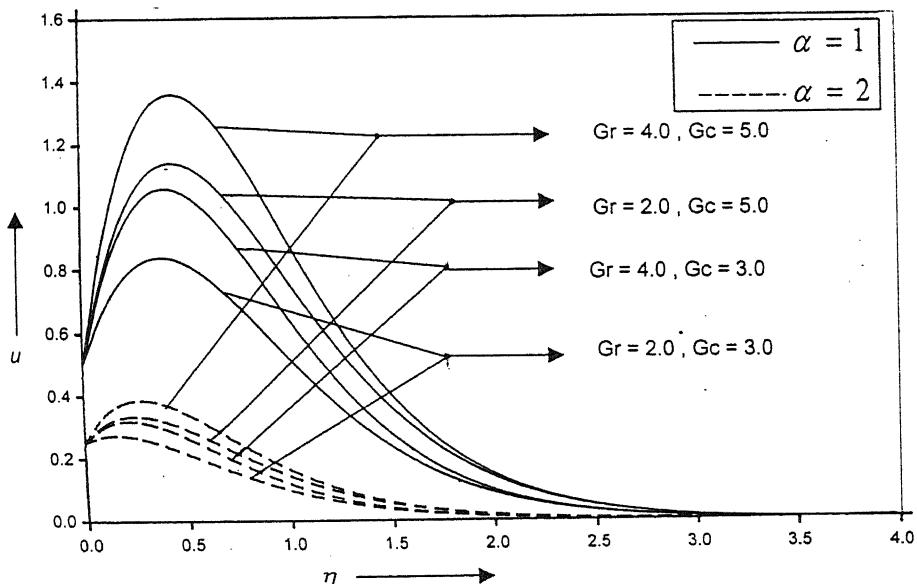
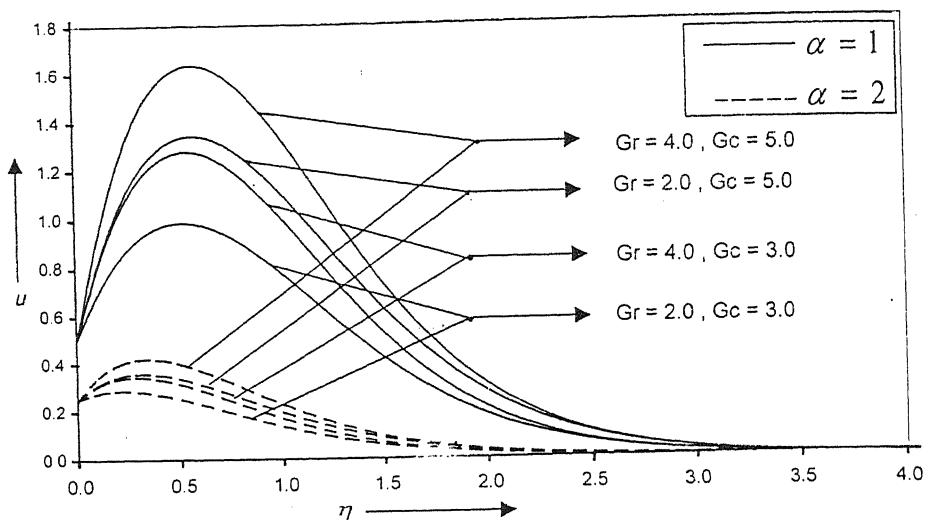
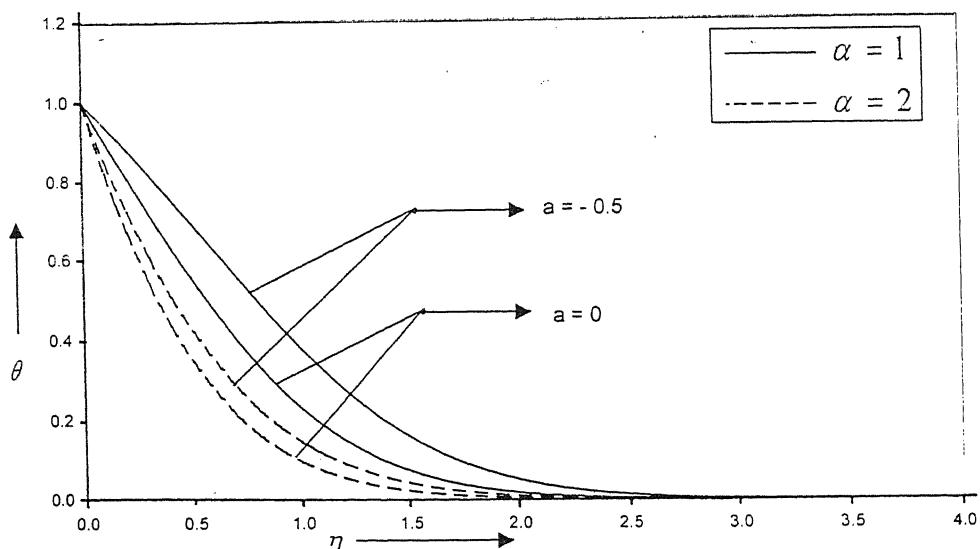
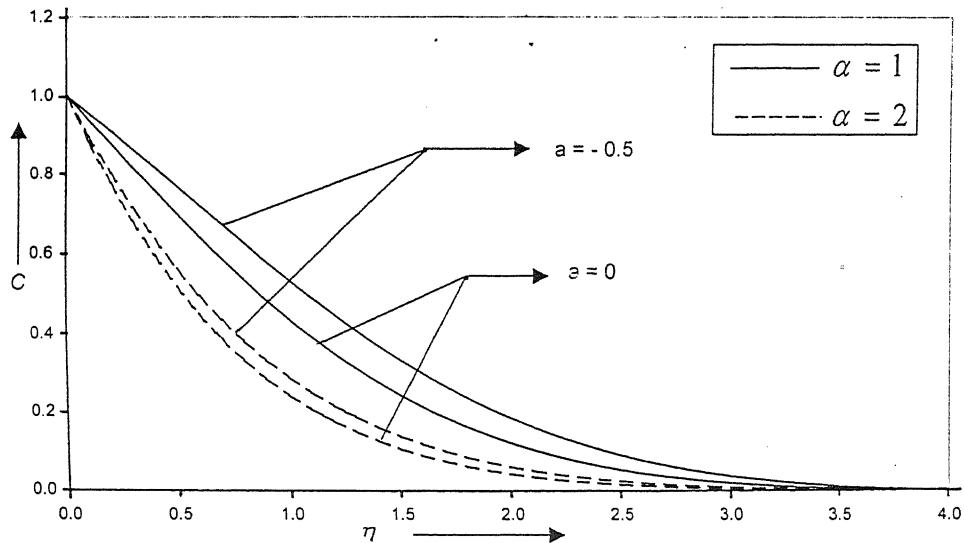
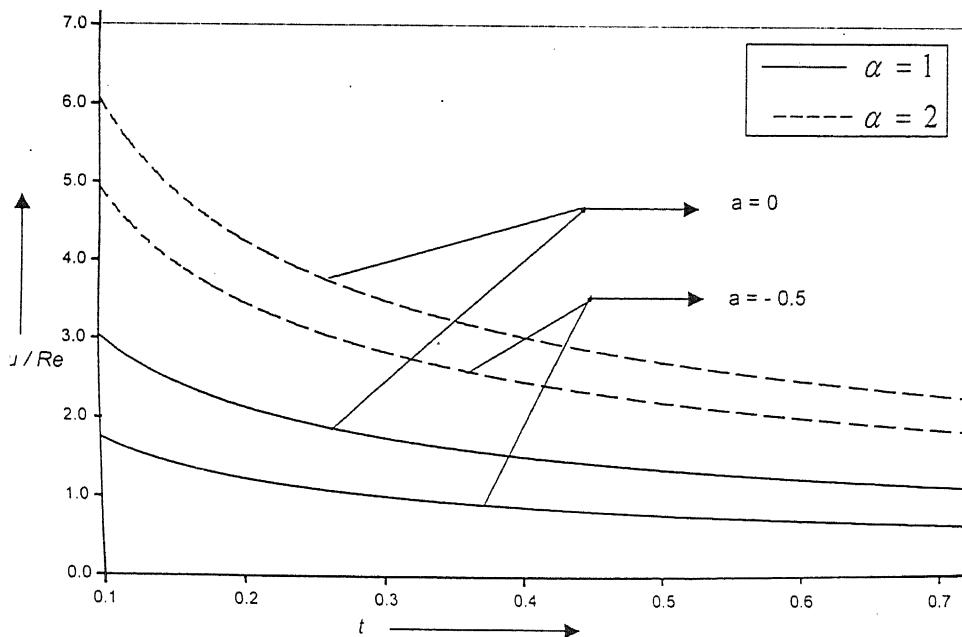
अपरूपक प्रतिबल फलनों $f'_i(0)$, पृष्ठ उष्मा स्थानान्तरण फलन $\theta'(0)$ तथा सान्द्रण फलन $\theta'(0)$ के $Pr = 0.72$, $Sc = 0.30$ एवं $\alpha = 2.0$ प्लेट पर अ-समान त्वरण पर सांख्यिक मान

Gr	Gc	a	$\theta'(0)$	$C'(0)$	$f'_0(0)$	$f'_1(0)$	$f'_2(0)$
2.0	3.0	0	-1.91493	-1.23609	1.53500	-1.15476	0.13086
4.0	3.0	0	-1.91493	-1.23609	3.16276	-1.33087	0.15706
2.0	5.0	0	-1.91493	-1.23609	3.47915	-1.40596	0.17199
4.0	5.0	0	-1.91493	-1.23609	5.10694	-1.58209	0.19818
2.0	3.0	-0.5	-1.55425	-1.08094	1.77929	-1.10904	0.12370
4.0	3.0	-0.5	-1.55425	-1.08094	3.37619	-1.28199	0.14982
2.0	5.0	-0.5	-1.55425	-1.08094	3.58295	-1.33097	0.15968
4.0	5.0	-0.5	-1.55425	-1.08094	5.17986	-1.50393	0.18580

परिणाम तथा विवेचना

उपरिस्तर घर्षण के अनुपात C_f/C_{f0} को t के विपक्ष उल्लेखित किया गया है जो प्लेट के एक समान तथा असमान त्वरण की दशाओं पर है अर्थात् क्रमशः $\alpha = 1.0$ तथा $\alpha = 2.0$) तथा $a = -0.5$ (अंतःक्षेपण) (चित्र 2)। यह देखा जाता है कि अप्रवेश्य प्लेट C_f/C_{f0} अनुपात सभी दशाओं में t की वृद्धि होने पर घटता जाता है। अन्य प्राचलों तथा समय के स्थिर मानों के लिए यह अनुपात C_f/C_{f0} **Gr** या **Gc** में वृद्धि होने पर बढ़ता जाता है।

चित्र 1 तथा 2 में $\alpha = 1.0$ तथा $\alpha = 2.0$ दशाओं की तुलना करने पर स्पष्ट हो जाता है कि $Gc = 3.0$ तथा $Gr = 2.0, 4.0$ दशाओं में C_f/C_{f0} अनुपात α में वृद्धि के साथ घटता है और $Gc = 5.0$, $Gr = 4.0$ होने पर C_f/C_{f0} अनुपात α में वृद्धि के साथ बढ़ता जाता है।

चित्र 1: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 तथा a = 0 पर समय t के साथ उपरिस्तर घर्षण गुणांक C_f/C_{f_0} का विचरण

चित्र 3 में तथा 4 में वेग फलन u को समय $t = 0.5$ पर η के विरुद्ध आलेखित किया गया जो $m = 0.5, Pr = 0.72$, Sc = 0.3 तथा $a = 0$ (अप्रवेश्य प्लेट (चित्र 3) तथा $a = -0.5$ (अतः-क्षेपण) (चित्र 4) के लिए है। इन चित्रों से देखा जा सकता है कि अंतःक्षेपण के फलस्वरूप अधिकतम वेग बढ़ता है। यही नहीं, वेग परिसीमा स्तर मोटाई घटती है जब प्लेट असमान त्वरण ($\alpha = 2.0$) से गति करती है अपेक्षा समान त्वरण ($\alpha = 1.0$) पर। प्राचल Gr तथा Gc के प्रभाव से वेग बढ़ता है जब उनमें से कोई भी एक बढ़ता है।

चित्र 2: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 तथा a = –0.5 पर समय t के साथ उपरिस्तर घर्षण गुणांक C_f/C_{f_0} का विचरण

चित्र 3: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 तथा a = 0 पर समय t=0.5 पर η के विरुद्ध आवेग वितरण

चित्र 4: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 तथा a = –0.5 पर समय t = 0.5 पर η के विरुद्ध आवेग वितरण

चित्र 5: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 पर η के विरुद्ध ताप वितरण

चित्र 6: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 पर η के विरुद्ध सान्द्रण

चित्र 7: m = 0.5, Pr = 0.72, Sc = 0.30 तथा a = 0.5 पर समय t के साथ प्राचल Nu/Rc का विचरण

चित्र 5 में ताप फलन θ को η के विरुद्ध आलेखित किया गया है जब $m = 0.5$ तथा $Pr = 0.72$। यह देखा जाता है कि α में वृद्धि होने पर ताप घटता है। यह भी देखा जा सकता है कि तापीय परिसीमा स्तर मोटाई घटती है जब प्लेट असमान त्वरण ($\alpha = 2.0$) से गति करती है किन्तु समान त्वरण ($\alpha = 1.0$) पर नहीं।

चित्र 6 में सान्द्रण फलन C को $m = 0.5$ तथा $Pr = 0.72$ के लिए η के विरुद्ध आलेखित किया गया है। इस तरह सान्द्रण में α की वृद्धि के साथ कमी आती है। यह भी देखा जा सकता है कि सान्द्रण परिसीमा स्तर मोटाई जब अ-स्थायी त्वरण ($\alpha = 2.0$) से प्लेट गति करती है तो स्थायी त्वरण ($\alpha = 1.0$) की तुलना में घट जाती है।

चित्र 6 बतलाता है कि फलन $2Nu / Re$ समय के साथ घटता है और प्लेट को स्थायी तथा अ-स्थायी त्वरण दोनों दशाओं में $t > 0.6$ के लिए उपगामी हो जाता है। यही नहीं, यह फलन अंतःक्षेपण करने पर घटता है। अतः यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि मुक्त संवहन प्रवाह के समय $t > 0.6$ पर पूरी तरह विकसित हो जाता है।

निर्देश

1. पोहलहासेन, ई. : ZAMM, 1921, 1, 115.
2. ओस्ट्राच, एस. : ASME Trans., 1953, 75, 1287-1290.
3. जियोर्गैन्टोपोलस, जी. ए. : तथा नानूसिस, एन. डी. : Astrophys. Space Sci., 1980, 67, 229.
4. सिंह, पी., मिश्र, जे. के. तथा नारायन, के. ए. : Int. J. Num. Anal. Methods Geaomech., 1980, 13, 443.
5. सिंह, के. डी. तथा कुमार, सुरेश : J. Math. Phy. Sci., 1993, 27, 141.
6. ताक, एस. एस. तथा महर्षि, अरविन्द : Ganita Sandesh, 2000, 14 (2), 77-86.
7. महर्षि, अरविन्द तथा ताक, एस. एस. : Ranchi University Mathematical Journal, 1995, 26, 27-37.
8. टखर, एच. एस., गोर्ला, आर. एस. आर. तथा सून्दलगेकर, वी. एम. : Int. J. Num., Methods for Heat and Fluid Flow, 1996, 16, 77.
9. एलाबाशबेशी, ई. एम. ए. : Indian J. Pure Appl. Math., 1996, 27 (6), 621.
10. ताक, एस. एस. तथा गहलोत, आर. के. : Ind. J. Engg. & Mat. Sci., 2000, 7, 136-140.
11. वही. : विज्ञान परिषद् अनुसन्धान परिषद्, 2001, 44, (3) 183-193.
12. सून्दलगेकर, वी. एम. इत्यादि : Heat and Mass Transfer, 1995, 30, 309-312.
13. मोहसिन, एम. ए. तथा मंडल, ए. सी. : J. Phys. Appl. Phys., 1985, 18, L-63.

14. दवे, आभा, बंसल, जे. एल. तथा जाट, आर. एन. : Proc. Nat. Acad. Sci. India 1990, 60 (A), II, 211-226.

15. बंसल, जे. एल. Magnetofluid dynamics of Viscous Fluids, जयपुर पब्लिशिंग हाउस जयपुर, 1994, 262.

16. एब्रमोविट्ज, एम. तथा स्टेगन, आई. ए. : Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., New York, Tenth Edition, 1972, 299.

17. मेनन, के. आर. तथा जैन, ए. सी. : ZAMM, 1971, 51, 245-254.

पारिभाषिक शब्दावली

अंतः क्षेपण वेग ... Injection velocity
अनुप्रस्थ ... Transverse
अविमीय काल ... Non dimensional time
अपरूपक प्रतिबल फलन ... Shear stress functions
अस्थायी त्वरण ... Non-steady acceleration
उपरिस्तर घर्षण गुणांक ... Skin friction coefficient
ऊर्ध्व सरंध्र प्लेट ... Vertical porous plates
क्षैतिज ... Horizontal
द्रव्यमान स्थानान्तरण प्रवाह ... Mass transfer flow
प्राचल विचरण ... Variation of parameters
परिसीमा स्तर समीकरण ... Boundary layer equation
रैखिक समीकरण ... Linear equation
वेग वितरण ... Velocity distribution
संवहनी उष्मा ... Convective heat
सान्द्रण फलन ... Concentration function

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405